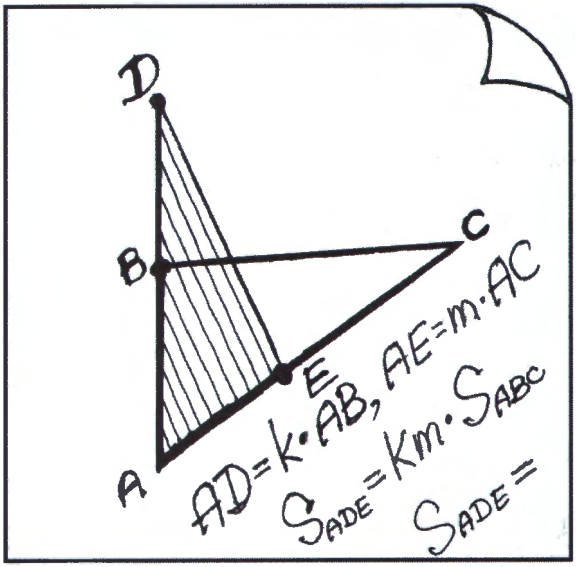
БИБЛИОТЕКА ШКОЛЬНИКА

М.В. ЛУРЬЕ

ГЕОМЕТРИЯ

Техника решения задач



Серия «Библиотека школьника»

М.В. Лурье

ГЕОМЕТРИЯ
Техника решения задач

Учебное пособие

3-е издание, стереотипное

ФЕНИКС
РОСТОВ-НА-ДОНУ

УНЦ ДО
МОСКВА

2002

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151
Л86

Л86 *Лурье М.В.*
Геометрия. Техника решения задач. Учебное пособие. — 3-е изд., стер. — Ростов н/Д.: Феникс; М.: Издательский отдел УНЦ ДО, 2002. — 240 с. — (Серия «Библиотека школьника»)

ISBN 5-222-02686-8 (ФЕНИКС)
ISBN 5-88800-185-6 (УНЦ ДО)

Выделяются и рассматриваются классы геометрических задач, объединенные общей идеей, приемами и методами решения. Показывается, как решение весьма сложных экзаменационных задач по геометрии раскладывается зачастую в последовательность более простых и стандартных задач, обладающих установившимися подходами и методами решения.

Большое количество примеров, заимствованных в основном из письменных работ, предлагавшихся на вступительных экзаменах по математике в Московском государственном университете, демонстрирует разнообразие идей, лежащих в основе геометрических задач, и вместе с тем достаточную стандартность приемов и методов их решения.

Книга предназначена прежде всего школьникам и абитуриентам вузов, учителям, а также широкому кругу читателей, любящих решать математические задачи.

Рецензент: Левинтова Н.Е., учитель средней школы № 707 г. Москвы

ISBN 5-222-02686-8
ISBN 5-88800-185-6

ПРЕДИСЛОВИЕ

Посвящается памяти
Б.И. Александрова

Настоящая книга представляет собой учебное пособие, предназначенное учащимся старших классов и лицам, окончившим школу и готовящимся к поступлению в высшие учебные заведения. Предметом книги является достаточно сложный раздел школьной программы — геометрия, которая, как показывает практика, представляет собой наибольшую трудность при сдаче вступительных экзаменов. Главные цели пособия — систематизировать знания, полученные учащимися в школе, выделить общие методы и приемы решения геометрических задач, указав в них стандартные элементы, продемонстрировать технику решения как простых, так и относительно сложных задач, дать поступающему достаточное количество материала для закрепления приобретённых навыков.

В отличие от большинства других руководств, не носящих методического характера, данное пособие ставит своей целью обучить поступающего методам и приемам решения геометрических задач. Для этого из всего многообразия геометрических задач выделяются классы, объединенные общей идеей и стандартной техникой решения. Объясняется, в чем именно состоит идея задач того или иного класса и какова методика их решения. Такой подход определил как расположение материала, так и подборку задач для самостоятельных упражнений, приведенных в конце каждого параграфа. Поскольку в книге рекомендуется определенная последовательность изучения материала, то во многих случаях для решения задач определенного раздела необходимы знания и умения, приобретенные в предыдущих разделах. Показывается, как во многих случаях решение весьма сложных экзаменационных задач как бы «расщепляется» на более простые элементы, анализ которых осуществляется по стандартной методике. В книге приводится большое число однотипных задач, решение которых должно закрепить полученные знания.

Множество примеров из экзаменационной практики, основанной главным образом на письменных работах по математике, предлагавшихся в Московском государственном университете, демонстрирует разнообразие идей, лежащих в основе геометрических задач, и вместе с тем достаточную стандартность методов и приемов их решения.

Автор будет благодарен всем, кто сочтет необходимым прислать свои отзывы и замечания о книге.

Проф. М.В. Лурье

Глава I. ПЛАНИМЕТРИЯ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ И ФОРМУЛЫ ПЛАНИМЕТРИИ

Отметим прежде всего теоремы и формулы планиметрии, наиболее часто используемые при решении геометрических задач. Список таких теорем и формул дополним некоторыми полезными утверждениями и соотношениями, указав, естественно, их доказательство.

Признаки равенства треугольников. Два треугольника равны, если выполняется одно из условий:

а) две стороны и угол, заключенный между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу, заключенному между ними, другого треугольника (рис. 1*a*);

б) два угла и прилежащая к ним сторона одного треугольника соответственно, равны двум углам и прилежащей к ним стороне другого треугольника (рис. 1*b*);

в) три стороны одного треугольника равны трем сторонам другого треугольника (рис. 1*c*).

На рис. 1*a*, *b*, *c* жирными линиями выделены элементы, равенство которых определяет равенство треугольников.

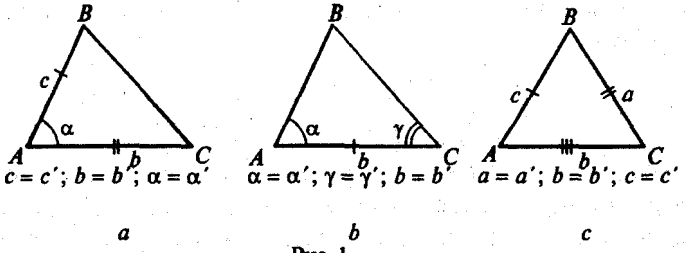


Рис. 1

Биссектриса внутреннего угла треугольника — это отрезок прямой, заключенный внутри треугольника и делящий данный угол на две равные части.

Биссектриса обладает следующими важными свойствами:

а) Биссектриса — есть **геометрическое место точек**, равноудаленных от сторон угла[1];

[1] Геометрическим местом точек, обладающих некоторым свойством, называется такое множество точек, которое содержит все точки, обладающие этим свойством, и не содержит ни одной точки, не обладающей им (см. § 8).

б) во всяком треугольнике биссектрисы пересекаются в одной точке O (рис. 2), являющейся центром окружности, вписанной в треугольник (т.е. касающейся всех его сторон);

в) биссектриса AD (рис. 2) любого угла A треугольника ABC делит противоположную сторону на части CD и BD, пропорциональные прилежащим сторонам AC и AB треугольника:

$$\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB}.$$

Доказательство. Легко видеть, что площади треугольников ACD и ABD, имеющих общую вершину A, относятся как длины их оснований, т.е. $S_{ACD} : S_{ABD} = CD : BD$.

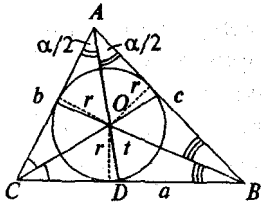


Рис. 2

С другой стороны, эти площади относятся как длины сторон $b : c$ ($b = AC$, $c = AB$), поскольку $S_{ACD} = \frac{1}{2} b \cdot l \cdot \sin(\alpha/2)$, $S_{ABD} = \frac{1}{2} c \cdot l \cdot \sin(\alpha/2)$, где l — длина биссектрисы AD, а α — величина угла A и, следовательно, $S_{ACD} : S_{ABD} = b : c$. Из сравнения полученных пропорций и вытекает доказываемое утверждение;

г) длина l биссектрисы AD (рис. 2) угла А треугольника ABC, равного α, заключенного между сторонами AC и AB, определяется по формуле:

$$l = \frac{2bc \cdot \cos\alpha/2}{b+c} = \frac{2\cos\alpha/2}{1/b + 1/c}.$$

Доказательство. Запишем площадь треугольника ABC двумя различными способами — один раз через стороны AC, AB и угол α, заключенный между ними, другой раз — через сумму площадей треугольников ACD и ABD:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha;$$

$$S_{ABC} = S_{ACD} + S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot l \cdot \sin\alpha/2 + \frac{1}{2} \cdot c \cdot l \cdot \sin\alpha/2.$$

Приравнивая эти выражения друг другу, получаем:

$$b \cdot c \cdot \sin\alpha = (b + c) l \cdot \sin\alpha/2,$$

или

$$2bc \cdot \sin \alpha/2 \cdot \cos \alpha/2 = (b + c)l \cdot \sin \alpha/2,$$

откуда и следует указанная выше формула для вычисления длины биссектрисы.

Медианой треугольника называется отрезок прямой, проведенной из вершины треугольника, лежащей внутри треугольника и делящий противоположную сторону на две равные части:

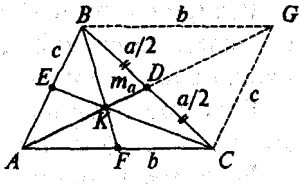


Рис. 3

а) медиана — есть геометрическое место точек, являющихся серединами отрезков прямых, заключенных внутри треугольника и параллельных той его стороне, к которой проведена медиана (рис. 3);

б) во всяком треугольнике медианы пересекаются в одной точке K, называемой **центром тяжести** треугольника. Эта точка отсекает от каждой медианы третью часть, считая от соответствующей стороны (т.е. делит медиану в отношении 1 : 2, считая от соответствующей стороны);

в) длины медиан треугольника вычисляются через длины его сторон по формулам:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2};$$

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2};$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

Доказательство. Достроим треугольник ABC до параллелограмма, проведя $BG \parallel AC$ и $CG \parallel AB$ (рис. 3). Легко видеть, что середина D стороны BC треугольника ABC будет являться точкой пересечения диагоналей параллелограмма $ABGC$. Следовательно, длина диагонали AG будет равна $2m_a$, где m_a — длина медианы треугольника ABC, проведенной к стороне BC из вершины A. Используя теорему о том, что сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равняется сумме квадратов всех его сторон (следствие теоремы косинусов), будем иметь равенство

$$4m_a^2 + a^2 = 2b^2 + 2c^2,$$

откуда следует первая из доказываемых формул. Аналогично доказываются и остальные формулы. В них m_b и m_c — длины соответствующих медиан треугольника ABC.

Высотой треугольника называется отрезок **перпендикуляра**, опущенного из вершины треугольника на **противоположную** сторону или ее продолжение.

Три высоты треугольника пересекаются в одной точке, называемой *ортоцентром*[2].

Срединный перпендикуляр — перпендикуляр, восстановленный к стороне треугольника из ее середины.

Все три срединных перпендикуляра пересекаются в одной точке O, являющейся центром окружности, описанной вокруг треугольника, т.е. проходящий через все его вершины (рис. 4).

Если треугольник остроугольный, центр описанной окружности лежит строго внутри треугольника (рис. 4*а*).

Если треугольник прямоугольный, центр описанной окружности лежит в середине гипотенузы (длина гипотенузы равна диаметру этой окружности) (рис. 4*б*).

Если треугольник тупоугольный, центр описанной окружности лежит вне треугольника (рис. 4*в*).

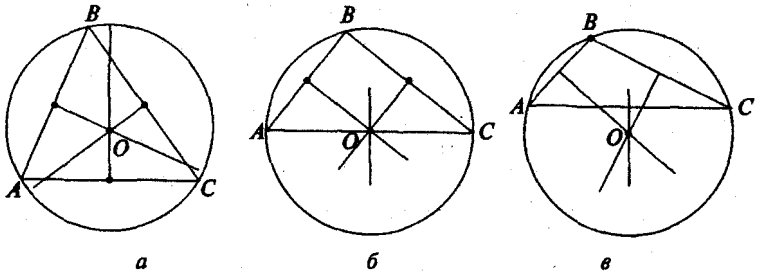


Рис. 4

Теорема синусов. Во всяком треугольнике ABC (рис. 5) отношение любой стороны к синусу противоположного ей угла есть постоянная для данного треугольника величина, т.е.:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma},$$

$\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{ABC} = \beta$, $\widehat{BCA} = \gamma$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Если R — радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC, то

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

[2] Термин «орто» означает «перпендикулярность».

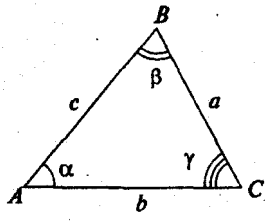


Рис. 5

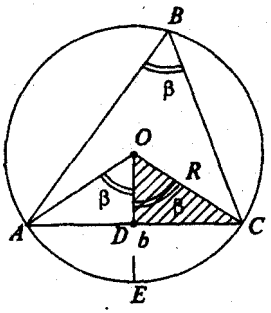


Рис. 6

Действительно, поскольку $\widehat{ABC}$ — вписанный, то $\smile AEC$ измеряется углом 2β (рис. 6).

Тогда угол AOC равен 2β, а его половина $\widehat{DOC} = \beta$. Из прямоугольного треугольника DOC имеем: $DC = R\sin\beta$, откуда получаем, что $b/2 = R\sin\beta \Rightarrow b/\sin\beta = 2R$.

Таким образом, если в треугольнике ABC известно основание b и угол при вершине β, то радиус окружности, описанной вокруг этого треугольника, находится по формуле:

$$R = \frac{b}{2\sin\beta}.$$

Полезно также иметь в виду следующее утверждение: геометрическое место точек M, из которых отрезок AC заданной длины b ($AC = b$) виден под заданным углом β, состоит из двух дуг окружностей радиуса $R = b/2\sin\beta$, опирающихся на рассматриваемый отрезок, как это показано на рис. 7.

Для того, чтобы построить центры (O и O_1) этих окружностей, достаточно найти вершины равнобедренных треугольников AOC и AO_1C, имеющих своими основаниями рассматриваемый отрезок AC и угол при вершине, равный 2β.

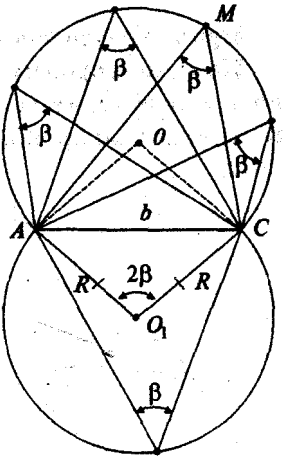


Рис. 7

Теорема косинусов. *Во всяком треугольнике ABC* (рис. 8) *квадрат одной из сторон BC равен сумме квадратов двух других сторон AB и AC минус удвоенное произведение длин этих сторон на косинус угла между ними:*

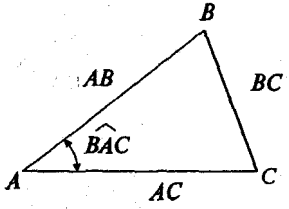


Рис. 8

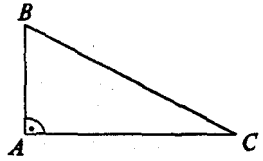


Рис. 9

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\widehat{BAC}.$$

Теорема Пифагора. *В прямоугольном треугольнике ABC* (рис. 9) *квадрат гипотенузы равен сумме квадратов его катетов:*

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

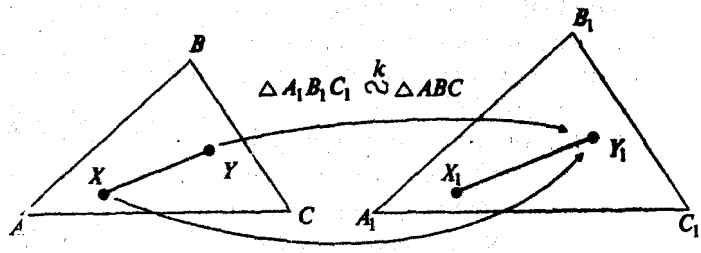
Подобие плоских фигур. Две плоские фигуры (например, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$) называются подобными, если существует отображение одной на другую, при котором расстояние между образами любых двух точек X_1 и Y_1 относится к расстоянию между прообразами этих точек X и Y как одно и то же число k. Число k называется коэффициентом подобия (рис. 10).

Подобие треугольников. В частности, два треугольника являются подобными, если углы одного треугольника равны углам другого треугольника, а противолежащие равным углам стороны пропорциональны (рис. 10).

$$\angle A_1 = \angle A,\ \angle B_1 = \angle B,\ \angle C_1 = \angle C;\quad \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA}.$$

Признаки подобия треугольников

По трем сторонам. Для того, чтобы два треугольника были подобны, необходимо и достаточно, чтобы три стороны одного треугольника были пропорциональны трем сторонам другого треугольника.



$$|X_1Y_1| = k \cdot |XY|$$

Рис. 10

По двум углам. Для того, чтобы два треугольника были подобны, необходимо и достаточно, чтобы два угла одного треугольника были равны двум углам другого треугольника.

По двум сторонам и углу. Для того, чтобы два треугольника были подобны, необходимо и достаточно, чтобы две стороны одного треугольника были пропорциональны двум сторонам другого, а углы, заключенные между этими сторонами, были равны.

Следствия

1. В подобных фигурах (например, треугольниках) углы между любыми сходственными линейными элементами равны, а длины этих элементов относятся как коэффициент подобия k.

Так, например, длины сходственных сторон AB и A_1B_1, биссектрис l_1 и l, медиан m_1 и m, высот h_1 и h, периметров P_1 и P, радиусов вписанных r_1 и r и описанных R_1 и R окружностей относятся как k:

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{l_1}{l} = \frac{m_1}{m} = \frac{h_1}{h} = \frac{P_1}{P} = \frac{r_1}{r} = \frac{R_1}{R} = k.$$

2. В подобных фигурах площади любых сходственных элементов относятся как квадрат коэффициента подобия k^2.

Так, например, для площадей $S_{A_1B_1C_1}$ и S_{ABC} подобных треугольников справедливо соотношение:

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = k^2.$$

Площадь треугольника. Для нахождения площади треугольника со сторонами $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ и противолежащими им углами $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{ABC} = \beta$, $\widehat{BCA} = \gamma$ (рис. 5) наиболее употребительны следующие формулы:

а) $S = \frac{1}{2}a\,h_a = \frac{1}{2}b\,h_b = \frac{1}{2}c\,h_c$,

где h_a, h_b, и h_c — длины высот треугольника, проведенных к соответствующим сторонам;

б) $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$;

в) формула Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ — полупериметр треугольника.

Кроме того, справедливы формулы, выражающие площадь треугольника через его стороны и радиус вписанной или описанной окружности;

г) $S = p \cdot r$

Доказательство. Действительно, площадь треугольника ABC (рис. 2) можно представить как сумму площадей трех треугольников OAB, OAC и OBC, имеющих общую вершину в центре O вписанной в треугольник ABC окружности. Каждый из этих треугольников имеет своим основанием какую-либо сторону треугольника ABC и одинаковую высоту, равную радиусу r вписанной окружности. Поэтому

$$S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OAC} + S_{OBC} = \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}ar = p \cdot r,$$

что и требовалось доказать. Очевидно, что такая же формула верна и для произвольного выпуклого многоугольника, если только в него можно вписать окружность;

д) $S = \dfrac{abc}{4R}$

Доказательство. Действительно, $S = 1/2 \cdot bc \cdot \sin\alpha$. С другой стороны, по теореме синусов $a/\sin\alpha = 2R$, или $\sin\alpha = a/2R$. Подставляя это выражение в формулу для площади S, получим рассматриваемое соотношение.

Как уже отмечалось, если треугольник $A_1B_1C_1$ получается из треугольника ABC преобразованием подобия с коэффициентом подобия k, то $S_{A_1B_1C_1} = k^2 S_{ABC}$. Полезно иметь в виду более общее утверждение;

е) **Теорема.** *Если в треугольнике ABC одну из сторон AB изменить в k раз ($AB_1 = k \cdot AB$, рис. 11), а другую — в m раз ($AC_1 = m \cdot AC$), оставив без изменения угол между ними, то площадь получившегося треугольника AB_1C_1 изменится в $k \cdot m$ раз (т.е. $S_{AB_1C_1} = k \cdot m \cdot S_{ABC}$).*

Действительно,

$$S_{AB_1C_1} = \frac{1}{2}AB_1 \cdot AC_1 \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}(k \cdot AB)(m \cdot AC)\sin\alpha =$$
$$= k \cdot m \cdot S_{ABC}.$$

Очевидно также, что при $k = m$ треугольник AB_1C_1 получается из треугольника ABC преобразованием подобия с коэффициен-

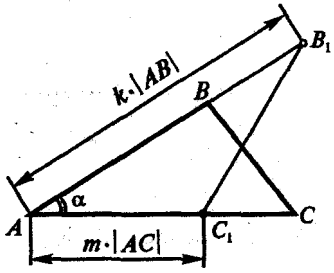


Рис. 11

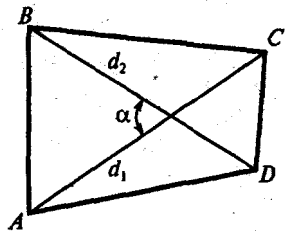


Рис. 12

том k. При этом полученная формула переходит в уже известную формулу $S_{AB_1C_1} = k^2 \cdot S_{ABC}$ для площадей подобных треугольников.

Четырехугольники. Четырехугольник называется выпуклым, если он расположен по одну сторону от любой из своих сторон (рис. 12).

Если диагонали выпуклого четырехугольника равны d_1 и d_2 и образуют угол α, то площадь четырехугольника дается формулой:

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha.$$

Середины сторон произвольного четырехугольника K, L, M, N являются вершинами некоторого параллелограмма. Стороны этого параллелограмма параллельны соответствующим диагоналям четырехугольника (рис. 13).

Средние линии (т.е. отрезки прямых, соединяющие середины противоположных сторон) четырехугольника в точке своего пересечения делятся пополам.

Параллелограмм — это четырехугольник $ABCD$ (рис. 14), у которого противоположные стороны попарно параллельны. Длины противоположных сторон равны.

Теорема 1. *Для того, чтобы выпуклый четырехугольник был параллелограммом, необходимо и достаточно, чтобы его диагонали в точке пересечения делились пополам.*

Теорема 2. *Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон* (рис. 14).

Доказательство. По теореме косинусов из треугольника BCD следует:

$$d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha.$$

По той же теореме из треугольника ABC находим:

$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta.$$

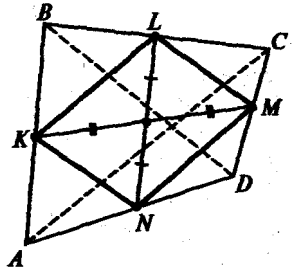


Рис. 13

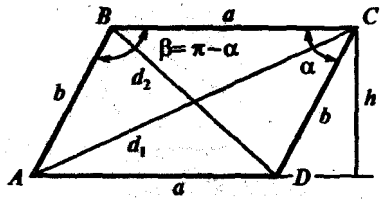


Рис. 14

Учитывая, что $\widehat{ABC} = \pi - \widehat{BCD}$, т.е. $\cos\beta = -\cos\alpha$, получаем:

$$d_1^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha.$$

Складывая квадраты длин диагоналей, получаем сумму квадратов длин всех сторон параллелограмма:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

Площадь параллелограмма дается формулами:

а) $S = ah$;

б) $S = ab\sin\alpha = ab\sin\beta$,

где $a = BC = AD$, $b = AB = CD$, h — высота параллелограмма, α, $\beta = \pi - \alpha$ — углы между смежными сторонами.

Прямоугольником *ABCD* (рис. 15*а*), называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

Длины диагоналей прямоугольника равны между собой.

Квадратом называется прямоугольник, у которого длины всех сторон равны (рис. 15*в*).

Ромбом называется параллелограмм, у которого длины всех сторон равны (рис. 15*б*).

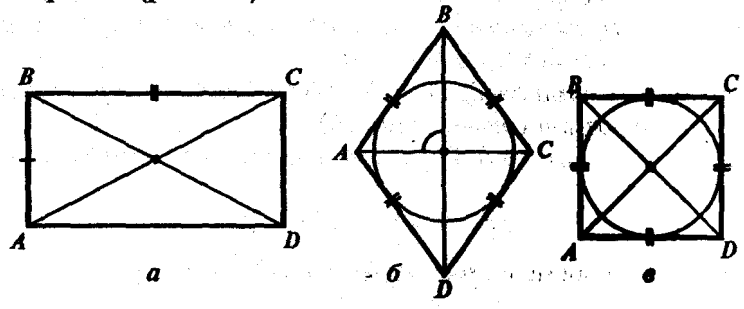


Рис. 15

Диагонали ромба и квадрата взаимно перпендикулярны.

В ромб и квадрат можно вписать окружность, центр которой находится в точке пересечения диагоналей.

Трапеция — это выпуклый четырехугольник $ABCD$ (рис. 16), у которого две противоположные стороны (основания) параллельны, а две другие не параллельны.

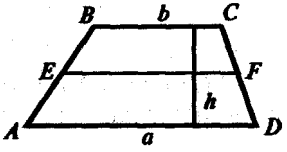


Рис. 16

Средняя линия трапеции EF — отрезок, соединяющий середины не параллельных сторон, параллельна ее основаниям. Длина средней линии равна полусумме длин оснований. Площадь трапеции с основаниями $AD = a$, $BC = b$ и высотой h дается формулой:

$$S = \frac{a+b}{2}h.$$

Теорема 1. *Для того, чтобы в выпуклый четырехугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы длин противоположных сторон были равны друг другу* (рис. 17*а*).

Теорема 2. *Для того, чтобы вокруг выпуклого четырехугольника можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы противоположных углов были равны* π (рис. 17*б*).

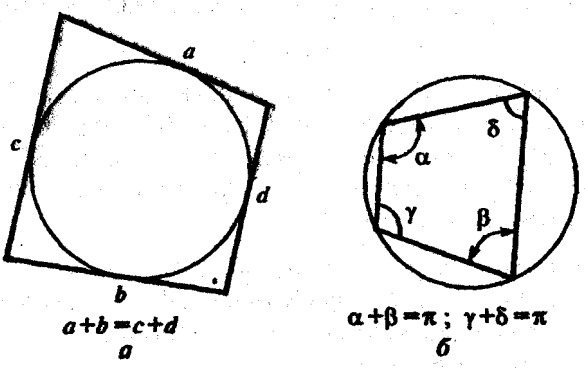


Рис.17

О ГЕОМЕТРИИ ОКРУЖНОСТИ

Окружность — геометрическое место точек, удаленных на одно и то же расстояние R от заданной точки O, её центра.

Круг — часть плоскости, ограниченная окружностью:

а) длина окружности $C = 2\pi R$;

б) площадь круга $S = \pi R^2$.

Угол между двумя радиусами окружности называется центральным углом (рис. 18). Если α — число радианов* в центральном угле, то:

а) длина l дуги, на которую опирается центральный угол, равна

$$l = \alpha \cdot R;$$

б) площадь S центрального сектора $OADB$ круга с углом α при вершине O дается формулой:

$$S = \frac{1}{2} R^2 \alpha;$$

в) площадь сегмента ADB определяется как разность площади сектора $OADB$ и площади треугольника OAB

$$S = \frac{1}{2} R^2 (\alpha - \sin\alpha),$$

где R — радиус окружности.

Угол ACB, образованный двумя хордами CA и CB, исходящими из одной точки C окружности (рис. 19), называется **вписанным**. Величина вписанного угла β равна половине величины центрального угла α, опирающегося на ту же дугу окружности

$$\beta = \alpha/2.$$

Угол, образованный хордой, стягивающей дугу AB окружности с центральным углом а и касательной AD к окружности, проведенной через один из концов хорды, также равен $a/2$ (рис. 19).

Касательные, проведенные к окружности из одной точки, имеют одинаковую длину.

Теорема 1. *Если из одной точки M (рис. 20), взятой вне круга, проведены к нему какая-нибудь секущая MA и касательная MC, то произведение длины секущей на длину ее внешней части MB равно квадрату длины касательной:*

$$MC^2 = MA \cdot MB.$$

Доказательство. Соединим точку C отрезками CB и CA с точками B и A. Треугольники BCM и ACM подобны: у них угол $\widehat{CMB}$ — общий, а $\widehat{CAM} = \widehat{BCM}$.

---

* **Радиан** — это центральный угол, опирающийся на дугу окружности, длина которой равна ее радиусу. В полном развернутом угле — 2π радиан.

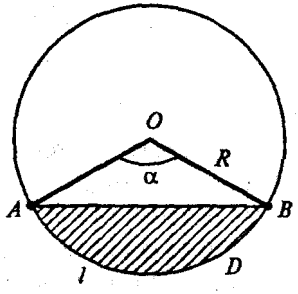


Рис. 18

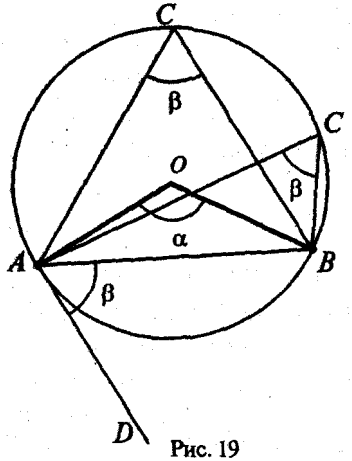


Рис. 19

Действительно, оба этих угла измеряются половиной $\smile CB$: один — как вписанный, другой — как угол между хордой и касательной. Из подобия треугольников следует пропорция:

$$\frac{MC}{MB} = \frac{MA}{MC},$$

что и доказывает сформулированное утверждение.

Доказанная теорема читается кратко следующим образом: «квадрат касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть».

Теорема 2. *Если через точку M* (рис. 21), *взятую внутри круга, проведено сколько угодно хорд AB, EF, KL,..., то произведение длин отрезков каждой хорды, на которые ее делит рассматриваемая точка, есть число постоянное для всех хорд:*

$$AM \cdot MB = KM \cdot ML = EM \cdot MF = \ldots = \text{const}.$$

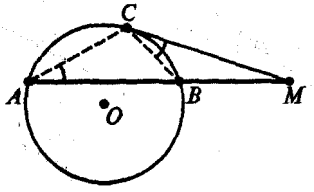


Рис. 20

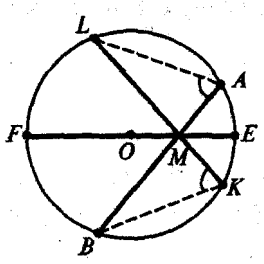


Рис. 21

Доказательство. Соединим точки A и L, K и B отрезками прямых. Треугольники ALM и KMB подобны. Углы AML и KMB равны как вертикальные, а углы MAL и MKB — как вписанные и опирающиеся на одну и ту же дугу LFB. Из подобия этих треугольников следует пропорция:

$$\frac{AM}{KM} = \frac{ML}{MB},$$

или $AM \cdot MB = KM \cdot ML$, что доказывает утверждение теоремы.

Векторы. Упорядоченная пара A, B несовпадающих точек определяет направленный отрезок с началом A и концом B. С помощью этого отрезка задается преобразование плоскости — параллельный перенос, при котором каждая точка M отображается на такую точку M_1, что луч MM_1 сонаправлен с лучом AB и расстояние MM_1 равно расстоянию AB (рис. 22).

Это преобразование называется **вектором**.

Вектор изображается направленным отрезком и обозначается символом $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$.

Один и тот же параллельный перенос можно задать с помощью бесконечного количества направленных отрезков. Все такие отрезки имеют одинаковую длину, называемую длиной или **модулем** вектора $|\overrightarrow{AB}| = |\vec{a}|$, параллельны (или лежат на одной прямой) и направлены в одну сторону. Поэтому два вектора считаются равными, если они изображаются отрезками, лежащими на одной или параллельных прямых, имеющими одинаковую длину и направленными в одну сторону.

Если векторы $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{A_2B_2}$ (рис. 23) изображаются отрезками, лежащими на одной или параллельных прямых, то они называются **коллинеарными**.

Для каждой точки A можно построить единственную точку B такую, что $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ (рис. 24). Это построение называется **откладыванием вектора** $\vec{a}$ от точки A.

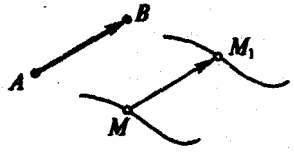


Рис. 22

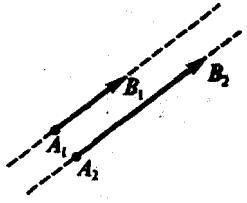


Рис. 23

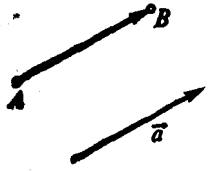


Рис. 24

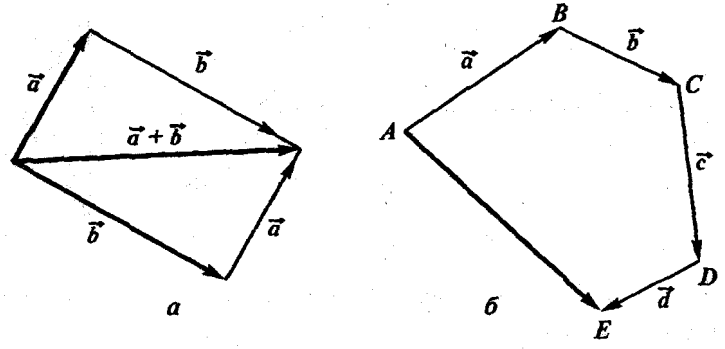


Рис. 25

Сумма и разность векторов. Два вектора складываются по правилу параллелограмма. Для этого оба вектора откладываются из одной точки и строится параллелограмм, сторонами которого являются вектора (рис. 25*а*).

Чтобы получить сумму большего числа векторов, нужно отложить от произвольной точки *A* первый вектор $\vec{a}$, а каждый последующий вектор $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ отложить от конца предыдущего. Суммой будет вектор, начало которого совпадает с началом (точка А) первого, а конец — с концом (точка *E*) последнего вектора (рис. 25*б*).

Разностью двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, который, будучи сложенным с вектором $\vec{b}$, дает $\vec{a}$. Разность двух векторов $\vec{b}$ и $\vec{a}$ представляется направленным отрезком, соединяющим концы этих векторов и имеющим направление «к концу того вектора, из которого вычитают» (рис. 26).

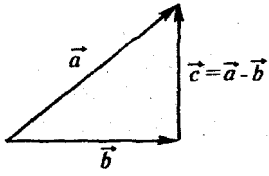


Рис. 26

Если для вектора $\vec{b}$ ввести противоположный ему вектор ($-\vec{b}$), который коллинеарен вектору $\vec{b}$, имеет тот же модуль, но направлен в противоположную сторону, то разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ представляется как сумма вектора $\vec{a}$ и вектора ($-\vec{b}$), т.е. $\vec{c} = a + (-\vec{b})$.

Сумма противоположных векторов равна 0: $\vec{b} + (-\vec{b}) = \vec{0}$.

Под **произведением** $\lambda\vec{a}$ вектора $\vec{a}$ на число λ понимается такой вектор, который коллинеарен вектору $\vec{a}$, имеет модуль $|\lambda|\,|\vec{a}|$ и направлен в ту же сторону, что и $\vec{a}$ — если λ положительно, и в противоположную — если λ отрицательно. Геометрически умножение вектора на число означает растяжение или сжатие вектора и,

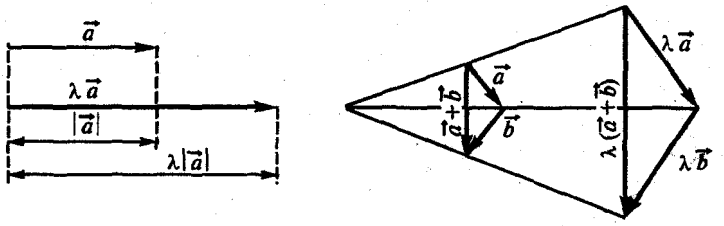


Рис. 27

возможно, перемену его направления на противоположное (рис. 27). Имеют место равенства:

$$(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a},$$

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b},$$

в которых λ и μ — произвольные действительные числа.

Вектор $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ называется **линейной комбинацией** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Если λ и μ — произвольные действительные числа, а $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — неколлинеарные вектора, то, варьируя эти числа, можно получить произвольный вектор плоскости.

Если $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ — два неколлинеарных вектора, отложенные от точки O, то вектор $\overrightarrow{OC}$, оканчивающийся в середине отрезка AB, равен полусумме векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е.

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}.$$

Вообще, вектор точки F, делящий отрезок AB в отношении $\lambda : \mu$ (λ и μ — положительные числа) и начинающийся в точке O, дается формулой (рис. 28):

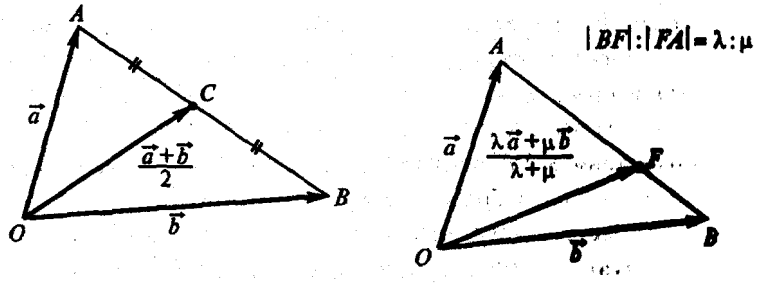


Рис. 28

$$\overline{OF} = \frac{\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}}{\lambda + \mu}.$$

РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА КОМПОНЕНТЫ. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два неколлинеарных вектора в плоскости, а $\vec{z}$ — произвольный вектор в той же плоскости, то всегда существуют такие числа α и β, что $\vec{z} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. В этом случае говорят, что вектор $\vec{z}$ разложен по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. На рис. 29 все три вектора отложены от одной точки O.

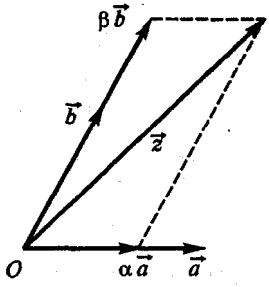


Рис. 29

Если $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — неколлинеарные единичные векторы (т.е. векторы, модуль которых равен единице $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$), то произвольный вектор $\overline{AB}$ плоскости может быть представлен в виде $\overline{AB} = \vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$. В этом случае говорят, что вектор $\overline{AB}$ имеет в системе $\vec{i}$, $\vec{j}$ координаты $\{a_1, a_2\}$.

Если векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ взаимно перпендикулярны, причем вектор $\vec{j}$ может быть получен из вектора $\vec{i}$ поворотом против часовой стрелки, то говорят, что прямые, в которых лежат векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$, образуют декартову прямоугольную систему координат, а числа $\{a_1, a_2\}$. называются **декартовыми координатами** вектора $\vec{a}$.

Пусть точка A с координатами (x_1, y_1) — начало вектора $\vec{a}$, а точка B с координатами (x_2, y_2) — его конец (рис. 30). Тогда координаты вектора связаны с координатами точек A и B формулами:

$$a_1 = x_2 - x_1,\ a_2 = y_2 - y_1,$$

т.е. декартовы координаты вектора равны разности соответствующих координат конца вектора и его начала.

Декартовы координаты вектора $\vec{a}$ являются проекциями этого вектора на соответственные оси системы координат:

$$a_1 = np_x\ \vec{a},\ a_2 = np_y\ \vec{a}.$$

Пусть вектор $\vec{a}$ имеет координаты $\{a_1, a_2\}$, что записывается в виде $\vec{a}\{a_1, a_2\}$, а вектор $\vec{b}$ — $\{b_1, b_2\}$, или $\vec{b}\{b_1, b_2\}$.

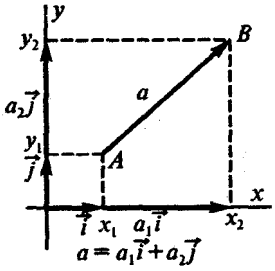


Рис. 30

Тогда:

1) $(\vec{a} + \vec{b})\ \{a_1 + b_1,\ a_2 + b_2\}$;

2) $(\vec{a} - \vec{b})\ \{a_1 - b_1,\ a_2 - b_2\}$;

3) $\lambda\vec{a}\ \{\lambda a_1,\ \lambda a_2\}$;

4) $(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b})\ \{\lambda a_1 + \mu b_1,\ \lambda a_2 + \mu b_2\}$,

т.е. действиям с векторами отвечают идентичные действия с их координатами.

Докажем, например, что вектор $\vec{a} + \vec{b}$ имеет координаты $\{a_1 + b_1, a_2 + b_2\}$. Действительно, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно записать как

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j},$$

$$\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}.$$

Сумма этих векторов представляется в виде:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{i} + (a_2 + b_2)\vec{j}.$$

Отсюда следует, что числа $a_1 + b_1$ и $a_2 + b_2$ являются координаторами вектора $\vec{a} + \vec{b}$.

Модуль вектора $\vec{a}$ определяется через его декартовы координаты посредством равенства:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2},$$

а единичный вектор $\vec{e}$, имеющий с вектором $\vec{a}$ одинаковое направление, записывается в виде $\vec{e} = \vec{a}/|\vec{a}|$ и имеет координаты:

$$\{a_1/\sqrt{a_1^2 + a_2^2},\ a_2/\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\}.$$

Скалярное произведение векторов. Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними*. Иными словами, скалярное произведение векторов — это число.

Если через φ обозначить угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а через $\vec{a}\cdot\vec{b}$ — их скалярное произведение, то

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi.$$

* Углом φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется угол между их направлениями.

Необходимым и достаточным условием перпендикулярности двух ненулевых векторов является равенство нулю их скалярного произведения:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad (\vec{a} \neq 0, \ \vec{b} \neq 0).$$

Свойства скалярного произведения:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (переместительный закон);

2) $(\lambda \vec{a})\vec{b} = (\lambda \vec{a}\,\vec{b})$ (сочетательный закон);

3) $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\,\vec{b} + \vec{a}\,\vec{c}$ (распределительный закон).

Скалярное произведение выражается через координаты сомножителей по формуле:

$$\vec{a}\,\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Доказательство. Действительно, представим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равенствами:

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j},$$
$$\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}.$$

Используя свойства скалярного произведения, находим:

$$\vec{a}\,\vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j})(b_1\vec{i} + b_2\vec{j}) =$$
$$= a_1 b_1(\vec{i}\,\vec{i}) + a_1 b_2(\vec{i}\,\vec{j}) + b_1 a_2(\vec{j}\,\vec{i}) + a_2 b_2(\vec{j}\,\vec{j}).$$

Поскольку скалярные произведения $(\vec{i}\,\vec{j})$ $(\vec{j}\,\vec{i})$ равны нулю вследствие перпендикулярности векторов $\vec{i}$ и $\vec{j}$, а скалярные произведения $(\vec{i}\,\vec{i})$ $(\vec{j}\,\vec{j})$ равны единице, то из последнего равенства получаем формулу: $\vec{a}\,\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$.

Отсюда, в частности, следует:

$$(\vec{a}\,\vec{a}) = \vec{a}^2 = |\vec{a}||\vec{a}|\cos 0 = |\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2,$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

Необходимым и достаточным условием перпендикулярности ненулевых векторов $\vec{a}\,\{a_1, a_2\}$ и $\vec{b}\,\{b_1\ b_2\}$ является равенство:

$$a_1\,b_1 + a_2\,b_2 = 0.$$

Зная скалярное произведение векторов, можно определить угол между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|},$$

или в координатной записи:

$$\cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

Поскольку косинус острого угла положителен, а косинус тупого угла — отрицателен, то, если скалярное произведение положительно, векторы образуют острый угол, а если отрицательно — тупой.

На этом закончим обзор основных теорем и формул планиметрии. Задачи, которые приведены ниже, дополняют предложенный список, поэтому они снабжены решениями; ознакомление с ними весьма полезно.

ЗАДАЧИ

Задача 1. (***Теорема о свойстве биссектрисы внешнего угла треугольника***). *Пусть BD — отрезок биссектрисы внешнего угла треугольника ABC* (рис. 31), *заключенный между вершиной B треугольника и точкой D пересечения биссектрисы с продолжением основания AC. Тогда отношение расстояний точки D до вершин треугольника при его основании пропорционально боковым сторонам треугольника, т.е.*

$$\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{CB}.$$

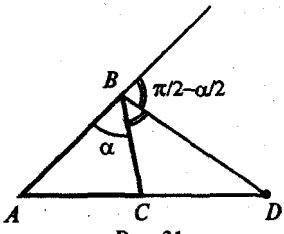


Рис. 31

Решение. Обозначим $\widehat{ABC} = \alpha$, тогда внешний угол при вершине B будет равен $\pi - \alpha$, а $\widehat{CBD} = \pi/2 - \alpha/2$.

Легко видеть, что площади треугольников ABD и CBD, имеющих общую вершину B и лежащих на одной прямой основания, относятся как длины этих оснований, т.е. $S_{ABD} : S_{CBD} = AD : CD$.

С другой стороны, площади треугольников ABD и CBD можно записать в следующем виде:

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot BD \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2} AB \cdot BD \cos\frac{\alpha}{2},$$

$$S_{CBD} = \frac{1}{2} CB \cdot BD \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2} CB \cdot BD \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Отсюда видно, что $S_{ABD} : S_{CBD} = AB : CB$. Сравнивая последнее отношение площадей с полученными ранее, заключаем, что

$$AD : CD = AB : CB.$$

Задача 2. *Доказать, что треугольник, в котором равны длины: а) либо двух высот; б) либо двух медиан; в) либо двух биссектрис, является равнобедренным.*

Решение. а) пусть сначала в треугольнике равны длины двух каких-нибудь высот, например $h_a = h_c$. Покажем, что треугольник — равнобедренный. Для этого запишем площадь S треугольника ABC двумя различными способами:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} c \cdot h_c,$$

где $c = AB$, $a = CB$. Поскольку $h_a = h_c$ то $AB = CB$ и треугольник ABC — равнобедренный;

б) пусть теперь равны длины двух медиан, например $m_a = m_c$. Воспользовавшись формулами, выражающими длины медиан через стороны треугольника, получаем:

$$4m_a^2 + a^2 = 2b^2 + 2c^2,$$

$$4m_c^2 + c^2 = 2b^2 + 2a^2.$$

Поскольку $m_a = m_c$, то почленная разность этих равенств дает

$$a^2 - c^2 = 2(c^2 - a^2),$$

откуда следует, что $a = c$ и треугольник ABC — равнобедренный;

в) наконец, рассмотрим случай равных биссектрис. Пусть $l_a = l_c$. Используя формулу, выражающую длину биссектрисы через длины сторон треугольника и заключенный между ними угол, получим:

$$\frac{2bc\cdot\cos\alpha/2}{b+c}=\frac{2ab\cdot\cos\gamma/2}{a+b},$$

или

$$\frac{\cos\alpha/2}{1/b+1/c}=\frac{\cos\gamma/2}{1/b+1/a}.$$

Предположим противное, т.е. что треугольник ABC не равнобедренный: $a \neq c$, пусть, например, $a > c$. Тогда $1/b + 1/c > 1/b + 1/a$, а поскольку написанные выше дроби равны, то необходимо, чтобы и $\cos\alpha/2 > \cos\gamma/2$. Заметим далее, что функция $y = \cos x$ в первой четверти монотонно убывает. Поэтому из неравенства $\cos\alpha/2 > \cos\gamma/2$ следует неравенство $\alpha/2 < \gamma/2$ или $\alpha < \gamma$.

Таким образом, мы получили противоречивое утверждение: в треугольнике ABC против большей стороны a лежит меньший угол α. Поскольку этого не может быть, то наше исходное предположение $a > c$ неверно. Аналогично доказывается, что a не может быть и меньше c. Остается единственный вывод: $a = c$ и треугольник ABC — равнобедренный.

Задача 3. (***Теорема тангенсов***). *Если b и c — две стороны треугольника, а β и γ — противолежащие им углы, то имеет место соотношение*

$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\operatorname{tg}[(\beta-\gamma)/2]}{\operatorname{tg}[(\beta+\gamma)/2]},$$

называемое теоремой тангенсов.

Решение. Так как согласно теореме синусов

$$\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R,$$

то $b = 2R\sin\beta$, $c = 2R\sin\gamma$, где R — радиус окружности, описанной вокруг треугольника. Далее имеем:

$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{2R(\sin\beta-\sin\gamma)}{2R(\sin\beta+\sin\gamma)}=\frac{2\cos(\beta+\gamma)/2\,\sin(\beta-\gamma)/2}{2\sin(\beta+\gamma)/2\,\cos(\beta-\gamma)/2},$$

или

$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\operatorname{tg}(\beta-\gamma)/2}{\operatorname{tg}(\beta+\gamma)/2},$$

что и требовалось доказать.

Применение теоремы тангенсов позволяет иногда упрощать вычисление неизвестных элементов треугольника. Пусть, например, в треугольнике заданы две стороны b, c и угол α, заключенный между ними. Тогда остальные углы треугольника β и γ можно найти, используя соотношение

$$\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\pi-\alpha}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$$

и, таким образом,

$$\begin{cases}\operatorname{tg}(\beta+\gamma)/2=\operatorname{tg}(\pi/2-\alpha/2)=\operatorname{ctg}\alpha/2,\\ \operatorname{tg}(\beta-\gamma)/2=\dfrac{b-c}{b+c}\operatorname{ctg}\alpha/2.\end{cases}$$

Поскольку b, c и α известны, то легко вычисляются сумма углов $(\beta+\gamma)$ и их разность $(\beta-\gamma)$.

Конечно, эту задачу можно решить с помощью теорем косинусов и синусов, однако вычисления, производимые в случае использования теоремы тангенсов, проще.

Задача 4. *Доказать следующие утверждения:*

1. Угол, вершина которого расположена вне круга, измеряется полуразностью дуг окружности этого круга, заключенных внутри угла;

2. Угол, вершина которого расположена внутри круга, измеряется полусуммой дуг, которые высекают из окружности круга стороны угла и их продолжения;

3. Угол, образованный касательной к окружности и хордой, исходящими из одной точки окружности, измеряется половиной дуги, заключенной внутри этого угла.

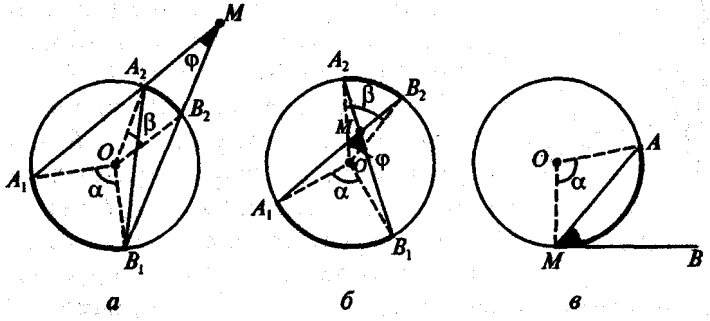


Рис. 32

Решение. а) пусть угол A_1MB_1 с вершиной в точке M вне круга равен φ (рис.32а), а центральные углы $\widehat{A_1OB_1} = \alpha$ и $\widehat{A_2OB_2} = \beta$. Тогда

$$\varphi = \frac{1}{2}(\alpha - \beta).$$

Действительно, $\widehat{A_1A_2B_1} = \alpha/2$ и $\widehat{A_2B_1B_2} = \beta/2$. Поскольку угол $A_1A_2B_1$ — внешний угол треугольника MA_2B_1, то его величина равна сумме величин двух несмежных с ним углов A_1MB_1 и A_2B_1M, т.е. $\alpha/2 = \varphi + \beta/2$ или $\varphi = (\alpha - \beta)/2$, что и требовалось доказать.

б) пусть угол A_1MB_1 с вершиной в точке M внутри круга равен φ (рис. 32*б*), а центральные углы $\widehat{A_1OB_1} = \alpha$ и $\widehat{A_2OB_2} = \beta$. Тогда

$$\varphi = \frac{1}{2}(\alpha + \beta).$$

Действительно, $\widehat{A_1A_2B_1} = \alpha/2$ и $\widehat{A_2B_1B_2} = \beta/2$. Тогда внешний к треугольнику MA_2B_1 угол φ равен $\alpha/2 + \beta/2$, что и требовалось доказать.

в) пусть угол $\widehat{AMB}$ с вершиной в точке M, лежащей на окружности, равен φ (рис. 32*в*), а центральный угол $\widehat{MOA} = \alpha$. Тогда

$$\varphi = \frac{\alpha}{2}.$$

Действительно, $\varphi = \pi/2 - \widehat{OMA}$, $\widehat{OMA} = (\pi - \alpha)/2$ и $\varphi = \pi/2 - \widehat{OMA} = \alpha/2$, что и требовалось доказать.

Задача 5. *Доказать, что высоты AP, BQ, CR треугольника ABC являются биссектрисами углов треугольника PQR.*

Решение. Пусть точка O — ортоцентр треугольника ABC, т.е. точка пересечения его высот (рис. 33).

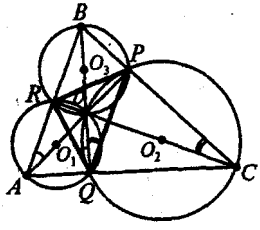


Рис. 33

Тогда можно построить три окружности с центрами в точках O_1, O_2 и O_3, являющихся серединами отрезков AO, BO и CO, соответственно, причем точки A, O, R, Q лежат на первой из этих окружностей, точки C, O, P, Q — на второй и точки B, O, P, R — на третьей окружности. Действительно, проведем, например, через точки A, O и R окружность. Понятно, что ее центр O_1 должен совпадать с серединой отрезка AO, поскольку угол ARO — прямой и, следовательно, должен опираться на диаметр. Кроме того, точка Q также должна лежать на этой окружности, посколь-

ку угол AQO — прямой. Если бы точка Q лежала внутри круга, этот угол был бы тупой, а если — вне круга, то угол был бы острый (см. задачу 4 этого параграфа). Аналогично доказываются и утверждения относительно двух других окружностей.

Рассмотрим первую окружность. Углы RAO и RQO являются вписанными и опирающимися на одну и ту же дугу, поэтому их величины равны. Аналогично, равны величины углов PQO и PCO, поскольку эти углы также являются вписанными и опирающимися на одну и ту же дугу в окружности с центром O_2. Кроме того, равны величины углов RAO и PCO, поскольку эти углы входят в прямоугольные треугольники ABP и BCR с общим углом ABC. Отсюда следует, что $\widehat{RQO} = \widehat{PQO}$ и, следовательно, BQ — биссектриса угла PQR.

Аналогично доказывается, что две остальные высоты являются биссектрисами углов QRP и RPQ треугольника PQR.

Заметим, наконец, что в том случае, когда треугольник ABC — тупоугольный и точка пересечения высот лежит вне треугольника, приведенное доказательство не претерпевает существенных изменений.

Задача 6. *Доказать, что в прямоугольном треугольнике сумма длин катетов равна сумме диаметров вписанной и описанной окружностей:*

$$a + b = 2r + 2R,$$

при этом между острым углом α треугольника и отношением радиуса вписанной окружности к радиусу описанной к окружности существует зависимость:

$$\sin\alpha + \cos\alpha = 1 + \frac{r}{R},$$

где $a = BC$ и $b = AC$ — катеты треугольника, r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей соответственно.

Решение. Пусть O — центр вписанной окружности, а P, Q, R — точки ее касания со сторонами AB, BC и AC соответственно, величину угла $\widehat{CAB}$ обозначим через α (рис. 34).

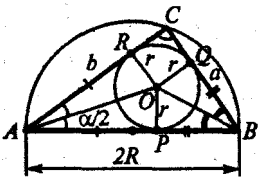


Рис. 34

Так как центр O вписанной окружности находится в точке пересечения биссектрис, то в прямоугольных треугольниках RAO и PAO: $\widehat{RAO} = \widehat{PAO}$, а в треугольниках PBO и QBO: $\widehat{PBO} = \widehat{QBO}$. Поэтому $\Delta RAO = \Delta PAO$ и $\Delta PBO = \Delta QBO$. Отсюда следует, что $AR = AP$, $BP = BQ$ и далее: $AR + BQ = AB = 2R$.

То, что центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы следует из теоремы о вписанных углах.

Прямой угол при вершине прямоугольного треугольника может опираться только на диаметр описанной окружности, поэтому длина гипотенузы всегда равна $2R$.

Четырехугольник $ORCQ$ — квадрат. Во-первых, у этого четырехугольника все углы — прямые. Кроме того, $OR = OQ = r$. Таким образом, $RC = CQ = r$ и $RC + CQ = 2r$.

Далее имеем:

$$AR + BQ = AB = 2R,$$

$$RC + CQ = 2r.$$

Складывая почленно эти равенства, получаем:

$$(AR + RC) + (BQ + CQ) = 2r + 2R,$$

т.е. $a+b = 2r+2R$.

Разделив обе части последнего равенства на $2R$ и заметив, что $a/2R = \sin\alpha$, $b/2R = \cos\alpha$, получаем $\sin\alpha + \cos\alpha = 1 + r/R$, откуда следует, что углы прямоугольного треугольника определяются отношением радиусов вписанной и описанной окружностей и, наоборот, отношение радиусов этих окружностей однозначно определяется углом прямоугольного треугольника.

Полученное соотношение можно преобразовать следующим образом:

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin(\alpha + \pi/4) = 1 + \frac{r}{R}.$$

Отсюда следует

$$\frac{r}{R} = \sqrt{2}\sin(\alpha + \pi/4) - 1.$$

Поскольку максимальное значение синуса равно единице, то наибольшее значение, которое может принимать отношение радиусов вписанной и описанной окружностей, равно $\sqrt{2} - 1$ (в данном случае при $\alpha = \pi/4$). Отсюда видно, что отношение r/R удовлетворяет неравенству:

$$0 < \frac{r}{R} \le \sqrt{2} - 1.$$

Задача 7. *Доказать, что трапеция может быть вписана в окружность в том, и только в том случае, когда она равнобочная.*

Решение. Пусть трапеция $ABCD$ — равнобочная ($BC \parallel AD$, $AB = CD$). Покажем, что ее можно вписать в окружность.

Проведем через точки A, B и C окружность. Ее центр, как точка, равноудаленная от точек B и C, должен лежать на срединном к отрезку BC перпендикуляре. Поскольку, однако, такой перпендикуляр должен являться срединным и для отрезка AD равнобочной трапеции, то центр окружности должен быть также равноудален от вершин A и D. Следовательно, точка D также лежит на рассматриваемой окружности и трапеция $ABCD$ вписана в эту окружность.

Обратно, пусть трапеция $ABCD$ вписана в окружность. Покажем, что она — равнобочная. Согласно теореме о вписанных четырехугольниках, суммы противоположных углов трапеции равны 180°. Однако такой же величине равны и суммы углов при каждой боковой стороне трапеции ($BC \parallel AD$). Это может быть только в том случае, когда углы при основании трапеции равны, т.е. трапеция является равнобочной.

Задача 8. *В произвольной трапеции через точку пересечения диагоналей параллельно ее основаниям проведена прямая. Доказать, что отрезок этой прямой, заключенный внутри трапеции, делится точкой пересечения диагоналей пополам, причем длина каждой части равна*

$$\frac{ab}{a+b},$$

где a и b — длины оснований трапеции.

Решение. Пусть $ABCD$ — произвольная трапеция с основаниями $AD = a$, $BC = b$ (рис. 35). Отрезок EF проходит через точку O пересечения диагоналей трапеции: $EF \parallel BC \parallel AD$.

Покажем сначала, что $EO = FO$. Для этого обозначим высоту трапеции через H, а расстояние между прямыми BC и EF — через h. Из подобия треугольников EBO и ABD следует, что

$$\frac{EO}{AD} = \frac{h}{H},$$

или

$$EO = AD \cdot \frac{h}{H}.$$

Аналогично из подобия треугольников FCO и ACD следует

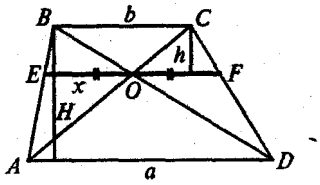


Рис. 35

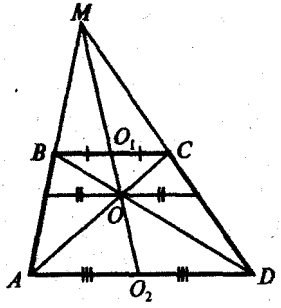


Рис. 36

$$\frac{FO}{AD} = \frac{h}{H},$$

или

$$FO = AD \cdot \frac{h}{H}.$$

Сравнивая эти пропорции, заключаем, что $EO = FO$, т.е. точка O делит отрезок EF пополам.

Обозначим длину каждого из отрезков EO и FO через x. Из подобия треугольников OBC и OAD имеем:

$$\frac{BO}{DO} = \frac{b}{a} \quad \text{или} \quad \frac{BO}{BO + DO} = \frac{BO}{BD} = \frac{b}{a+b}.$$

Из подобия треугольников OBE и ABD имеем:

$$\frac{BO}{BD} = \frac{x}{a}.$$

Сравнивая эти две пропорции, получаем выражение для величины x:

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{a+b} \quad \text{или} \quad x = \frac{ab}{a+b}.$$

Следствие. *Середины оснований трапеции и точка пересечения ее диагоналей лежат на одной прямой.*

Действительно, все три указанные точки являются серединами отрезков прямых, проведенных параллельно основанию треугольника ADM (M — точка пересечения боковых сторон трапе-

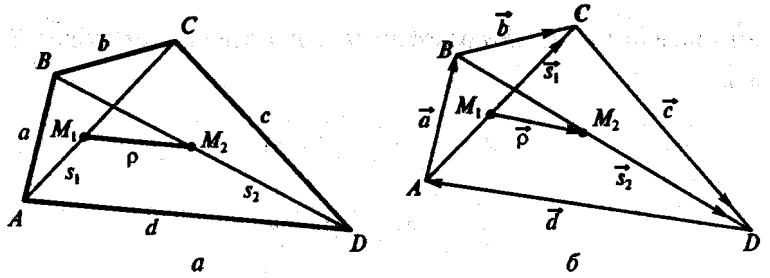


Рис. 37

ции $ABCD$ (рис. 36), поэтому они принадлежат медиане этого треугольника, проведенной из вершины M к основанию AD.

Задача 9. (***Теорема Л. Эйлера***). *Доказать, что сумма квадратов длин сторон произвольного выпуклого четырехугольника равна сумме квадратов его диагоналей, сложенной с учетверенным квадратом расстояния между серединами диагоналей* (рис. 37*а*).

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = S_1^2 + S_2^2 + 4\rho^2.$$

Эта теорема обобщает известное утверждение, верное для параллелограммов и состоящее в том, что сумма квадратов сторон параллелограмма равна сумме квадратов длин его диагоналей. Действительно, в параллелограмме диагонали, пересекаясь, делятся пополам, поэтому расстояние ρ между их серединами равно нулю, и мы получаем наше утверждение как частный случай при $\rho = 0$ теоремы Эйлера.

Решение. Введем следующие векторы (рис. 37*б*):

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB},\ \vec{b} = \overrightarrow{BC},\ \vec{c} = \overrightarrow{CD},\ \vec{d} = \overrightarrow{DA},$$
$$\vec{S}_1 = \overrightarrow{AC},\ \vec{S}_2 = \overrightarrow{BD},\ \vec{\rho} = \overrightarrow{M_1M_2}.$$

Тогда $\overrightarrow{AM_1} = \vec{S}_1/2$, $\overrightarrow{M_2D} = \vec{S}_2/2$.

Очевидны (см. рис. 37*б*) следующие векторные равенства:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{S}_1,$$
$$\vec{c} + \vec{d} = -\vec{S}_1,$$
$$\vec{d} + \vec{a} = -\vec{S}_2,$$
$$\frac{1}{2}\vec{S}_1 + \vec{\rho} + \frac{1}{2}\vec{S}_2 + \vec{d} = 0.$$

Эти равенства можно разрешить относительно векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$:

$$\vec{d} = -\frac{1}{2}\vec{S}_1 - \frac{1}{2}\vec{S}_2 - \vec{\rho};$$

$$\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{S}_1 - \frac{1}{2}\vec{S}_2 + \vec{\rho};$$

$$\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{S}_1 + \frac{1}{2}\vec{S}_2 - \vec{\rho};$$

$$\vec{c} = -\frac{1}{2}\vec{S}_1 + \frac{1}{2}\vec{S}_2 + \vec{\rho}.$$

Обозначим буквами без стрелочек длины векторов, т.е.

$$a = |\vec{a}|,\ b = |\vec{b}|,\ c = |\vec{c}|,\ d = |\vec{d}|,\ S_1 = |\vec{S}_1|,\ S_2 = |\vec{S}_2|,\ \rho = |\vec{\rho}|.$$

Вычислим квадраты длин векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, для чего каждое из полученных равенств умножим скалярно само на себя.

Имеем:

$$a^2 = \frac{1}{4}S_1^2 + \frac{1}{4}S_2^2 + \rho^2 - \frac{1}{2}\vec{S}_1\vec{S}_2 + \vec{S}_1\vec{\rho} - \vec{S}_2\vec{\rho},$$

$$b^2 = \frac{1}{4}S_1^2 + \frac{1}{4}S_2^2 + \rho^2 + \frac{1}{2}\vec{S}_1\vec{S}_2 - \vec{S}_1\vec{\rho} - \vec{S}_2\vec{\rho},$$

$$c^2 = \frac{1}{4}S_1^2 + \frac{1}{4}S_2^2 + \rho^2 - \frac{1}{2}\vec{S}_1\vec{S}_2 - \vec{S}_1\vec{\rho} + \vec{S}_2\vec{\rho},$$

$$d^2 = \frac{1}{4}S_1^2 + \frac{1}{4}S_2^2 + \rho^2 + \frac{1}{2}\vec{S}_1\vec{S}_2 + \vec{S}_1\vec{\rho} + \vec{S}_2\vec{\rho}.$$

Складывая почленно эти уравнения, находим:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = S_1^2 + S_2^2 + 4\rho^2,$$

что и составляет утверждение теоремы Эйлера.

Задача 10. (*Теорема о четырехугольнике, вписанном в окружность*). *Произведения расстояний от любой точки окружности, описанной около выпуклого четырехугольника, до его противоположных сторон или их продолжений равны между собой* (рис. 38):

$$ab = cd.$$

Решение. Пусть S — произвольная точка окружности, описанной около выпуклого четырехугольника $ABCD$, расположенная на $\smile AD$, не содержащей вершин четырехугольника (рис. 38).

Точки P, Q, M и N являются основаниями перпендикуляров, опущенных из S, соответственно, на стороны AD, BC, AB, CD или на их продолжения. Длины этих перпендикуляров обозначим через a, b, c и d соответственно. Нужно доказать, что $ab = cd$.

Рассмотрим две пары подобных треугольников:

$$\Delta APS \infty \Delta CNS \text{ и } \Delta AMS \infty \Delta CQS.$$

Первая пара треугольников подобна потому, что, во-первых, они — прямоугольные, а во-вторых, имеют по равному острому углу ($\widehat{SAP} = \widehat{SCN} = \beta$, как углы, опирающиеся на одну и ту же дугу SD окружности).

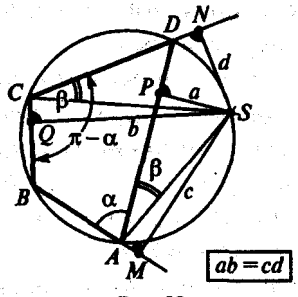


Рис. 38

Вторая пара прямоугольных треугольников также подобна, так как $\widehat{QCS} = \widehat{MAS}$. Действительно, обозначим угол $\widehat{BAD}$ четырехугольника $ABCD$ через α. Тогда $\widehat{BCD} = \pi - \alpha$, поскольку этот четырехугольник вписан в окружность. Следовательно, $\widehat{QCS} = \pi - \alpha - \beta$, в то время как угол $\widehat{MAS}$ также равен $\pi - \alpha - \beta$, поскольку он дополняет угол $\widehat{BAS}$, равный $\alpha + \beta$, до π. Таким образом, $\widehat{QCS} = \widehat{MAS}$. Из подобия треугольников следует:

$$\frac{a}{d} = \frac{AS}{CS}; \quad \frac{c}{b} = \frac{AS}{CS},$$

откуда заключаем, что $a/d = c/b$ или $ab = cd$, что и требовалось доказать.

§ 2. РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

В этом параграфе рассмотрим простой, но важный для приобретения практических навыков, метод решения задач, объединяемых общим названием «решение треугольников». Речь пойдет о расчете одних, неизвестных, элементов треугольника через другие, заданные.

Под элементами треугольника ABC мы будем понимать его стороны — a, b, c, противолежащие им углы — α, β, γ, биссектрисы внутренних углов треугольника — l_a, l_b, l_c, медианы — m_a, m_b,m_c, высоты — h_a, h_b, h_c, радиусы — r и R вписанной и описанной окружностей, соответственно, периметр треугольника — $2p$, его площадь — S, а также другие линейные или квадратичные параметры, характеризующие треугольник.

Произвольный треугольник определяется, вообще говоря, тремя независимыми параметрами, например, длинами трех его сторон или двух сторон и заключенным между ними углом, или одной стороной и величинами двух прилежащих к ней углов, или двумя сторонами и радиусом вписанной окружности и т.д. Сформулируем три основные задачи «решения треугольников».

Задача 1. *В треугольнике даны длины двух сторон и величина заключенного между ними угла. Рассчитать остальные элементы треугольника.*

Задача 2. *В треугольнике даны длина одной стороны и величины двух прилежащих к ней углов. Рассчитать остальные элементы треугольника.*

Задача 3. *В треугольнике даны длины трех его сторон. Рассчитать остальные элементы треугольника.*

Приведем решения каждой из этих задач. Как будет видно из дальнейшего, эти решения являются постоянными элементами решения других, более сложных задач.

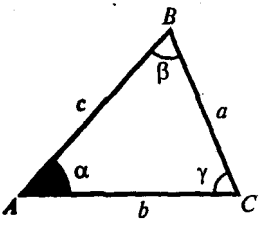


Рис. 39

Решение задачи 1. Итак, в треугольнике ABC (рис. 39), даны длины двух сторон: $AC = b$ и $AB = c$, а также величина угла

$\widehat{BAC} = \alpha$ между ними. Требуется рассчитать остальные элементы треугольника.

Длину a третьей стороны BC треугольника находим по теореме косинусов:

$$a = BC = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}.$$

Углы β и γ треугольника ABC можно вычислить либо по теореме синусов:

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha} \Rightarrow \sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha,$$

$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{c}{a}\sin\alpha,$$

либо по теореме косинусов:

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos\beta \Rightarrow \cos\beta = (c^2 + a^2 - b^2)/2ac,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \Rightarrow \cos\gamma = (a^2 + b^2 - c^2)/2ab,$$

и далее

$$\cos\beta = \frac{c - b\cos\alpha}{a},$$

$$\cos\gamma = \frac{b - c\cos\alpha}{a}.$$

Во всех этих формулах следует использовать уже найденное выражение для длины стороны a.

Если $c - b\cos\alpha > 0$, т.е. проекция отрезка AC на прямую AB меньше длины отрезка AB, то угол β — острый, в противном случае он — тупой. Аналогично, если $b - c\cos\alpha > 0$, т.е. проекция отрезка AB на прямую AC меньше длины отрезка AC, то угол γ — острый, в противном случае он — тупой.

Вычисление углов β и γ по формулам, получаемым на основе теоремы косинусов, более предпочтительно, поскольку эти формулы сразу позволяют записать углы β и γ через обратные тригонометрические функции:

$$\begin{cases} \beta = \arccos\dfrac{c - b\cos\alpha}{a}, \\ \gamma = \arccos\dfrac{b - c\cos\alpha}{a}, \end{cases}$$

в то время как форма записи этих углов через значения их синусов, получаемых по теореме синусов, зависит от того, острые или тупые эти углы.

Наконец, углы β и γ могут быть вычислены на основании теоремы тангенсов, как это сделано в задаче 3, приведенной после § 1:

$$\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\alpha/2,$$
$$\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cdot\operatorname{ctg}\alpha/2,$$

откуда находим:

$$\beta+\gamma=2\operatorname{arctg}\ [\operatorname{ctg}(\alpha/2)]=\pi-\alpha,$$
$$\beta-\gamma=2arctg\left(\frac{b-c}{b+c}ctg\frac{\alpha}{2}\right).$$

Длина l_a биссектрисы угла $\widehat{BAC}=\alpha$ находится по формуле:

$$l_a=\frac{2bc\cos(\alpha/2)}{b+c}$$

(см. § 1). Длины l_b и l_c остальных биссектрис находятся по этой же формуле заменой b, c и α соответственно на c, a и β или a, b и γ.

Длина m_c медианы, проведенной к стороне AB из вершины C, находится по теореме косинусов из треугольника AEC ($AE=EB$) (см. рис. 3):

$$m_c^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2+b^2-2\frac{c}{2}\cdot b\cos\alpha,$$
$$m_c=\frac{1}{2}\sqrt{c^2+4b^2-4bc\cos\alpha}.$$

Это же выражение следует также и из общих формул § 1 для длин медиан, если только в них величину a заменить полученным для нее значением. Аналогично:

$$m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+4c^2-4bc\cos\alpha},$$

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha}.$$

Площадь S_{ABC} треугольника дается формулой:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\ b \cdot c \cdot \sin\alpha.$$

Высоты треугольника находятся из равенств:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\ b \cdot c \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}\ h_a \cdot a = \frac{1}{2}\ h_b \cdot b = \frac{1}{2}\ h_c \cdot c,$$

откуда

$$h_b = c\sin\alpha,\ h_c = b\sin\alpha \text{ и } h_a = \frac{bc}{a} \cdot \sin\alpha.$$

В последнюю из этих формул, разумеется, нужно подставить найденное для a выражение через стороны b, c и угол α.

Радиус r вписанной окружности проще всего найти по формуле:

$$S_{ABC} = p \cdot r,$$

откуда

$$r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{bc \cdot \sin\alpha}{a + b + c}.$$

Радиус R описанной вокруг треугольника окружности находится по теореме синусов:

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}}{2\sin\alpha}.$$

Этим завершается решение первой задачи. Обратимся к решению второй задачи.

Решение задачи 2. По условию известна длина стороны $AC = b$ и величины двух прилежащих к ней углов: $\widehat{BAC} = \alpha$ и $\widehat{ACB} = \gamma$. Требуется рассчитать остальные элементы треугольника (рис. 40).

Прежде всего ясно, что $\widehat{ABC} = \beta = \pi - (\alpha + \gamma)$. Отсюда $\sin\beta = \sin(\alpha + \gamma)$. Из теоремы синусов находим:

$$\frac{b}{\sin(\alpha + \gamma)} = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Поэтому длины d и c двух оставшихся сторон треугольника и радиус R описанной окружности находятся из равенств:

$$a=b\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)},\quad c=b\frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)},\quad R=\frac{b}{2}\cdot\frac{1}{\sin(\alpha+\gamma)}.$$

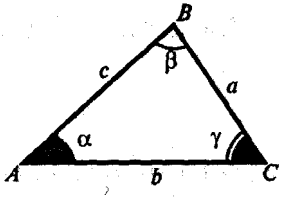


Рис. 40

Длины l_a, l_b и l_c биссектрис треугольника определяются уже известными соотношениями:

$$l_a=\frac{2bc\cos\alpha/2}{b+c},\quad l_b=\frac{2ac\cos\beta/2}{a+c},\quad l_c=\frac{2ab\cos\gamma/2}{a+b},$$

в которых a, c и β заменяются найденными для них выражениями.

Медианы m_a, m_b и m_c определяются по характерным для них формулам через длину известной стороны b и найденные длины двух других сторон a и c.

Высоты h_a и h_c легко находятся по формулам:

$$h_a=b\sin\gamma;\quad h_c=b\sin\alpha.$$

Третья же высота h_b может быть определена различными способами. Можно, например, воспользоваться равенствами:

$$h_b=a\sin\gamma=b\frac{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)},$$

а можно, рассмотрев два прямоугольных треугольника ABD и DBC, где D — основание высоты, опущенной из вершины B на сторону AC (рис. 41), получить для h_b уравнение:

$$h_b\operatorname{ctg}\alpha+h_b\operatorname{ctg}\gamma=b.$$

Из этого уравнения находим:

$$h_b=\frac{b}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\gamma}=b\frac{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}.$$

Необходимо отметить, что данная формула имеет место независимо от того, острые ли углы α и γ, как это показано на рис. 41, или хотя бы один из них — тупой.

Аналогичным приемом можно воспользоваться и для вычисления радиуса вписанной окружности (рис. 42). Поскольку ее центр

O лежит в точке пересечения биссектрис треугольника, то из прямоугольных треугольников AOE и COE (E — точка касания вписанной окружности и стороны AC) следует:

$$r\,\mathrm{ctg}\,(\alpha/2) + r\,\mathrm{ctg}\,(\gamma/2) = b,$$

или

$$r = \frac{b}{\mathrm{ctg}\,(\alpha/2) + \mathrm{ctg}\,(\gamma/2)} = b\,\frac{\sin(\alpha/2)\cdot\sin(\gamma/2)}{\sin(\alpha/2+\gamma/2)}.$$

Площадь треугольника ABC вычисляется по формуле:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\,b\cdot h_b = \frac{1}{2}\,b^2\cdot\frac{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}.$$

Рассмотрим решение последней, третьей задачи.

Решение задачи 3. Теперь известны длины a, b, c всех сторон треугольника. Вычислим остальные его элементы.

Углы треугольника вычисляются на основании теоремы косинусов.

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cdot\cos\alpha \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{c^2+b^2-a^2}{2bc};$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos\beta \Rightarrow \beta = \arccos\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac};$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cdot\cos\gamma \Rightarrow \gamma = \arccos\frac{b^2+a^2-c^2}{2ab}.$$

Площадь треугольника находится по формуле Герона

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

в которой $p = (a+b+c)/2$ — полупериметр.

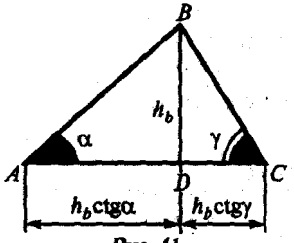


Рис. 41

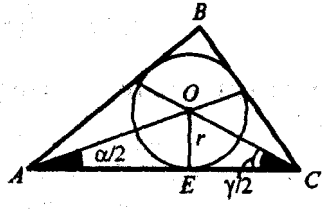


Рис. 42

Радиус вписанной окружности равен:

$$r = \frac{S_{ABC}}{p}.$$

Радиус описанной окружности находится по формуле:

$$R = \frac{abc}{4S_{ABC}}.$$

Длины медиан вычисляются через стороны треугольника по формулам, приведенным в § 1.

Длины высот определяются равенствами:

$$h_a = \frac{2S_{ABC}}{a};\ h_b = \frac{2S_{ABC}}{b};\ h_c = \frac{2S_{ABC}}{c},$$

в которых площадь S_{ABC} треугольника уже вычислена.

Длины биссектрис вычисляются через стороны треугольника и заключенные между ними углы по неоднократно использовавшимся формулам (§ 1).

Пример 1. *Найти отношение радиусов окружностей, вписанной в треугольник ABC и описанной около него, если известны отношение двух его сторон $AB : AC = m : n$ и угол $\widehat{BAC} = \alpha$, заключенный между этими сторонами.*

Решение. Пусть длина стороны AB равна c, а длина стороны AC — b, $c : b = m : n$. Тогда решение данной задачи сводится к расчету величин r и R по двум сторонам и углу, заключенному между ними.

Определяем сначала по теореме косинусов третью сторону треугольника:

$$BC^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha,$$

откуда

$$BC = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}.$$

Затем находим радиус r вписанной окружности:

$$r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{bc\sin\alpha}{b + c + \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}}.$$

После этого вычислим радиус R описанной окружности:

$$R=\frac{BC}{2\sin\alpha}=\frac{\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\alpha}}{2\sin\alpha}.$$

Наконец, вычисляем их отношение:

$$\frac{r}{R}=\frac{2bc\sin^2\alpha}{(b+c+\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\alpha})\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\alpha}},$$

Разделив числитель и знаменатель дроби на b^2, получим:

$$\frac{r}{R}=\frac{2(c/b)\sin^2\alpha}{(1+c/b+\sqrt{1+(c/b)^2-2\,c/b\cos\alpha})\sqrt{1+(c/b)^2-2\,c/b\cos\alpha}}=$$

$$=\frac{2(m/n)\sin^2\alpha}{(1+m/n+\sqrt{1+(m/n)^2-2\,m/n\cos\alpha})\sqrt{1+(m/n)^2-2\,m/n\cos\alpha}}.$$

Пример 2. *Вычислить площадь круга, вписанного в треугольник ABC, у которого $AC=5$ м, $\widehat{BAC}=30°$, $\widehat{BCA}=45°$.*

Решение. Из прямоугольных треугольников OAE и OCE (рис. 42), находим:

$$r\cdot\operatorname{ctg}15°+r\cdot\operatorname{ctg}22{,}5°=5,$$

откуда

$$r=\frac{5}{\operatorname{ctg}15°+\operatorname{ctg}22{,}5°},$$

где r — радиус вписанного круга.

Легко видеть, что

$$\operatorname{ctg}^2 15°=\frac{\cos^2 15°}{\sin^2 15°}=\frac{1+\cos30°}{1-\cos30°}=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=(2+\sqrt{3})^2,$$

$$\operatorname{ctg}^2 22{,}5°=\frac{\cos^2 22{,}5°}{\sin^2 22{,}5°}=\frac{1+\cos45°}{1-\cos45°}=\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=(1+\sqrt{2})^2.$$

Отсюда

$$\operatorname{ctg}15°=2+\sqrt{3},\ \operatorname{ctg}22{,}5°=1+\sqrt{2}.$$

Таким образом,

$$r = \frac{5}{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}},$$

а площадь круга S равна:

$$S = \pi r^2 = \frac{25\pi}{14+6\sqrt{2}+6\sqrt{3}+2\sqrt{6}} \quad (м^2).$$

Пример 3. *В треугольнике ABC известны стороны $AB = 3$, $BC = 5$, $AC = 7$. Найти длину биссектрисы угла ABC треугольника.*

Решение. Вычислим сначала величину β угла ABC. Для этого воспользуемся теоремой косинусов. Имеем:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \widehat{ABC},$$

или

$$49 = 9 + 25 - 30\cos\beta,$$

откуда получаем, что $\cos\beta = -1/2$ или $\beta = 120°$.

Далее, воспользовавшись формулой

$$l_b = \frac{2AB \cdot BC \cos\beta/2}{AB + BC},$$

где l_b — длина биссектрисы, делящей пополам угол между сторонами AB и BC, получаем:

$$l_b = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1/2}{3+5} = \frac{15}{8}.$$

ЗАДАЧИ

1. В треугольнике ABC: $AB = 2$, $AC = 7$, $\widehat{BAC} = 60°$. Найти h_a, высоту треугольника, опущенную на сторону BC.

Ответ. $7/\sqrt{13}$.

2. Длины сторон AB и AC треугольника ABC соответственно равны 4 и 5 см, а величина угла, заключенного между ними, — 60°. Найти длины отрезков касательных, проведенных из вершины B к окружности вписанного в треугольник круга.

Ответ: $\sqrt{11-\sqrt{21}/2}$ см.

3. В треугольнике ABC со сторонами $Bc = a$, $AC = b$ и углом α между ними вписан полукруг с диаметром, лежащим на стороне, противоположной этому углу. Найти радиус этого полукруга.

Ответ: $ab \cdot \sin \alpha/(a + b)$.

4. В треугольнике ABC известны $AB = c$ и $AC = b$. Величина угла $\widehat{BAC}$ вдвое больше величины угла $\widehat{ABC}$. Найти длину третьей стороны треугольника.

Ответ: $\sqrt{b(b+c)}$.

5. Найти расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей для равнобедренного треугольника с основанием, равным a, и боковой стороной b.

Ответ: $b\,|\,a - b\,|\,/\sqrt{4b^2 - a^2}$, причем $b > a/2$.

6. Найти длину биссектрисы прямого угла треугольника, если его катеты равны a и b.

Ответ: $ab\sqrt{2}\,/(a+b)$.

7. Стороны треугольника ABC равны 5, 7 и 8 см. Найти площадь круга, описанного вокруг этого треугольника.

Ответ. $49\pi/3$ см^3.

8. Существует ли треугольник, у которого все высоты меньше 1 см, а площадь — больше 100м^2?

Ответ: Существует.

9. Доказать неравенство

$$(p - a)(p - b)(p - c) \le \frac{1}{8}abc,$$

в котором a, b и c — длины сторон треугольника, p — его полупериметр.

Указание. Воспользовавшись неравенством "среднее арифметическое неотрицательных чисел x и y больше или равно их среднему геометрическому", поочередно принимая за эти числа разности $p - a$, $p - b$ и $p - c$.

10. Доказать, что во всяком треугольнике отношение радиуса вписанной окружности к радиусу описанной окружности не может превышать 1/2.

Указание. Воспользоваться результатом решения предыдущей задачи.

§ 3. РАСЧЕТ ЭЛЕМЕНТОВ ТРЕУГОЛЬНИКА МЕТОДОМ СОСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

Задачи, изложенные в предыдущем параграфе, позволяют проиллюстрировать стандартный метод решения задач более широкого класса, также связанных с расчетом элементов треугольника, а именно — «метод составления уравнений». Как ясно уже из самого названия, этот метод основан на введении одного или нескольких неизвестных, которыми являются те или иные элементы треугольника, и последующем составлении для них необходимых уравнений.

Рассмотрим сначала простой пример.

Задача. *В треугольнике ABC длина стороны AB равна* 4 *см, длина стороны AC равна* 5 *см, радиус окружности, описанной вокруг треугольника, составляет* $\sqrt{7}$ *см,* (рис. 43).

Определить площадь треугольника ABC.

Если бы в треугольнике ABC кроме сторон AB и AC был известен угол $\widehat{BAC}$ между ними, то задача была бы «стандартной», одной из тех, решение которых рассматривалось в предыдущем параграфе. Однако угол треугольника неизвестен, вместо него дан другой элемент, а именно — радиус описанной окружности.

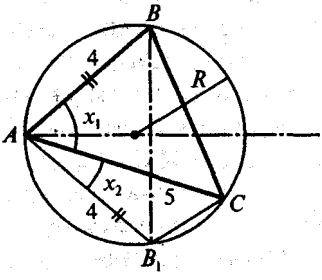


Рис. 43

Чтобы свести эту задачу к решению «стандартной», введем в качестве неизвестного недостающий угол $\widehat{BAC}$. Если принять теперь, что в задаче известны две стороны и угол между ними, то стандартным методом можно вычислить как радиус описанной окружности, так и площадь треугольника. Причем, приравнивая полученное выражение радиуса описанной окружности данному для него значению, получим уравнение, определяющее величину угла $\widehat{BAC}$.

Решение. Обозначим величину угла $\widehat{BAC}$ через x. Тогда BC находится по теореме косинусов:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos x,$$

или

$$BC = \sqrt{16 + 25 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos x} = \sqrt{41 - 40 \cos x}.$$

Используя затем теорему синусов, получаем для радиуса R описанной окружности выражение:

$$R = \frac{BC}{2 \sin x} = \frac{\sqrt{41 - 40 \cos x}}{2 \sin x}.$$

Поскольку $R = \sqrt{7}$, то получаем для x уравнение:

$$\frac{\sqrt{41 - 40 \cos x}}{2 \sin x} = \sqrt{7}.$$

Решим это уравнение:

$$41 - 40 \cos x = 28 \sin^2 x$$

или

$$28 \cos^2 x - 40 \cos x + 13 = 0.$$

Отсюда:

1. $\cos x = \frac{1}{2}$, $x_1 = \frac{\pi}{3}$ $(\sin x_1 = \sqrt{3}/2)$;

2. $\cos x = \frac{13}{14}$, $x_2 = \arccos 13/14$ $(\sin x_2 = 3\sqrt{3}/14)$.

Таким образом, решение задачи не однозначно. Существуют два треугольника, имеющих по две равные стороны, но с разными углами между ними, причем оба таких треугольника вписаны в одну и ту же окружность с радиусом $R = \sqrt{7}$.

Из чертежа на рис. 43 видно, что такими треугольниками могут быть ΔABC и ΔAB_1C, где B_1 — точка, симметричная с точкой B относительно диаметра окружности, проходящего через вершину A треугольника.

Соответственно найденным значениям x_1 и x_2 получаем значения площади треугольника:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin x_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)};$$

$$S_{AB_1C} = \frac{1}{2} AB_1 \cdot AC \sin x_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{14} = 15\sqrt{3}/7 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Этот пример наглядно показывает, в чем состоит суть излагаемого метода. Отказавшись от «неудобного» условия задачи, которое непосредственно не могло быть использовано (в нашем случае — от радиуса R описанной окружности), мы ввели неизвестную, но «удобную» величину, которая дополнила исходные данные до «стандартного» набора параметров (в рассматриваемом случае —угол x треугольника). Эти параметры позволили известным образом вычислить любой элемент треугольника, в том числе и тот элемент, от которого мы временно отказались. Формула для вычисления этого элемента служила уравнением для определения введенного неизвестного.

Рассмотрим еще одни пример.

Задача. *Один из углов треугольника составляет* 60°, *а длина высоты, опущенной на одну из сторон, образующих этот угол, равна* 3*м. Найти площадь треугольника, если радиус вписанного в него круга равен* 1*м.*

Решение. Пусть в треугольнике ABC (рис. 41, 42) угол $\widehat{BAC} = \pi/3$. Кроме того, известны длина высоты: $h_b = 3$, опущенной из вершины B, и радиус: $r = 1$.

Введем две неизвестные: длину стороны AC обозначим x, а $\widehat{BAC}$ – γ. Будем считать далее, что в треугольнике ABC даны сторона и два прилежащих к ней угла. Тогда, согласно идее рассматриваемого метода, следует выразить через эти данные радиус вписанного круга и высоту. Воспользовавшись для этого стандартным приемом «решения треугольников», получим систему уравнений:

$$\begin{cases} h(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\gamma) = x, \\ r(\operatorname{ctg}\alpha/2 + \operatorname{ctg}\gamma/2) = x \end{cases}$$

с двумя неизвестными x и γ. Далее имеем:

$$\begin{cases} \sqrt{3} + 3\ \operatorname{ctg}\gamma = x, \\ \sqrt{3} + \operatorname{ctg}\gamma/2 = x \end{cases}.$$

Исключив x, получим уравнение:

$$\operatorname{ctg}\gamma/2 = 3\operatorname{ctg}\gamma,$$

или

$$\operatorname{ctg}\gamma/2 = 3\frac{\operatorname{ctg}^2\gamma/2 - 1}{2\operatorname{ctg}\gamma/2}.$$

Отсюда находим $\operatorname{ctg}\gamma/2 = \sqrt{3}$, $\gamma/2 = \pi/6$ или $\gamma = \frac{\pi}{3}$. Таким образом, треугольник ABC — равносторонний. Далее получаем:

$$x = 3\operatorname{ctg}\gamma + \sqrt{3} = 2\sqrt{3},$$

и, наконец, определяем площадь треугольника:

$$S_{ABC} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}\ (\text{м}^2).$$

В отличие от решения предыдущей задачи, здесь оказалось удобным ввести не одну, а две неизвестные. В остальном же решения этих задач принципиально не отличаются друг от друга.

Рассмотрим еще один пример решения задач подобного типа.

Задача. *Найти углы треугольника, если высота и медиана, проведенные из одной и той же вершины, образуют с боковыми сторонами углы, равные* α.

Решение. Прежде всего отметим, что в этой задаче не задан ни один линейный элемент, т.е. элемент с размерностью длины, и требуется определить только безразмерные величины — углы треугольника. Отсюда легко заключить, что наряду с любым треугольником, отвечающим условиям задачи, им же отвечает любой другой треугольник, подобный данному. Поэтому одну из сторон треугольника ABC (рис. 44), можно задать произвольно, например, принять $AC = 1$. Обозначим $\widehat{BAC} = x$, $\widehat{BCA} = y$. Тогда в треугольнике ABC будут как бы заданы сторона и два прилежащих к ней угла.

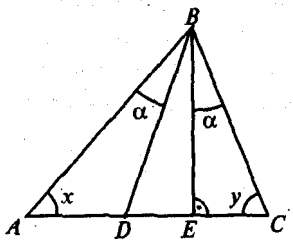


Рис. 44

Согласно общему методу, нужно записать через введенные неизвестные два условия:

а) высота BE треугольника ABC образует со стороной BC угол α;

б) медиана BD треугольника ABC образует со стороной AB угол α.

Первое из этих условий приводит к простому уравнению:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - y. \qquad (1)$$

Второе условие можно записать следующим образом. Пусть m — длина медианы BD. Очевидно, что $AD = 1/2$, $DC = 1/2$, $\widehat{DBC} = \pi - x - y - \alpha = \pi - (x + y + \alpha)$. Тогда, используя теорему синусов в ΔABD и ΔDBC, имеем:

$$\frac{AD}{\sin\alpha} = \frac{m}{\sin x} \quad \text{или} \quad \frac{1/2}{\sin\alpha} = \frac{m}{\sin x};$$

$$\frac{DC}{\sin(\pi - x - y - \alpha)} = \frac{m}{\sin y} \quad \text{или} \quad \frac{1/2}{\sin(x + y + \alpha)} = \frac{m}{\sin y}.$$

Исключая m, получаем:

$$\frac{\sin(x + y + \alpha)}{\sin\alpha} = \frac{\sin y}{\sin x}. \qquad (2)$$

Таким образом, приходим к системе двух уравнений с двумя неизвестными x и y.

Исключая из второго уравнения y с помощью первого, получаем:

$$\frac{\cos x}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin x},$$

или

$$\sin 2x = \sin 2\alpha.$$

Отсюда имеем:

1) $2x = 2\alpha \Rightarrow x = \alpha$;

2) $2x = \pi - 2\alpha \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$.

Первое равенство дает решение: $x = \alpha$, $y = \pi/2 - \alpha$, т.е. $x + y = \pi/2$, (треугольник ABC — прямоугольный).

Второе равенство приводит к решению: $x = y = \pi/2 - \alpha$, т.е. треугольник ABC — равнобедренный (медиана BD совпадает с высотой BE).

В качестве последнего примера этого параграфа рассмотрим следующую задачу.

Задача. *Хорда AB стягивает дугу окружности, равную $120°$. Точка C лежит на этой дуге, а точка D лежит на хорде AB. При этом $AD = 2$, $BD = 1$, $DC = \sqrt{2}$. Найти площадь треугольника ABC.*

Решение.* Обозначим угол ACD буквой x (рис. 45). Тогда угол $\widehat{CDB} = \pi - x$ и площадь S треугольника ABC дается формулой:

$$S = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DC \cdot \sin x + \frac{1}{2} \cdot BD \cdot DC \cdot \sin(\pi - x)$$

или

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \sin x + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \sin x = \frac{3\sqrt{2}}{2} \sin x.$$

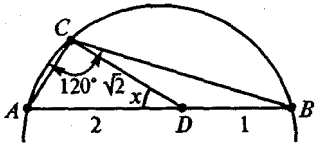


Рис. 45

Таким образом, задача сводится к отысканию неизвестной x.

По условию задачи угол $\widehat{ACB}$ равен 120°. Значит, это условие нужно использовать в составлении уравнения для x. Для этого используем теорему косинусов в ΔABC, выразив предварительно AC и BC по этой же теореме из треугольников ADC и BDC:

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2\,AD \cdot DC \cos x,$$

$$BC^2 = BD^2 + DC^2 - 2\,BD \cdot DC \cos(\pi - x)$$

или

$$AC^2 = 6 - 4\sqrt{2} \cos x,$$

$$BC^2 = 3 + 2\sqrt{2} \cos x.$$

Наконец, используя равенство

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos 120°,$$

получаем уравнение для определения величины x:

$$9 = (6 - 4\sqrt{2} \cos x) + (3 + 2\sqrt{2} \cos x) + \\ + \sqrt{6 - 4\sqrt{2} \cos x} \cdot \sqrt{3 + 2\sqrt{2} \cos x}$$

или

$$2\sqrt{2} \cos x = \sqrt{6 - 4\sqrt{2} \cos x} \cdot \sqrt{3 + 2\sqrt{2} \cos x}.$$

* Здесь, как и во многих других задачах, приводится один из возможных путей решения. В данном случае выбранный путь решения демонстрирует возможности излагаемого метода. По-другому эту задачу можно решить, используя теорему о произведении отрезков хорд, пересекающихся в одной точке круга (см. § 1).

Отметив, что $\cos x \geq 0$, получим:

$$8\cos^2 x = 18 - 16\cos^2 x,$$

$$\cos^2 x = \frac{3}{4}.$$

Поскольку $\cos x \geq 0$, то $\cos x = \sqrt{3}/2$ или $x = 30°$. Отсюда находим, что $\sin x = 1/2$ или $S = 3\sqrt{2}/4$.

Для приобретения навыков решения задач рассмотренным методом рекомендуется самостоятельно решить следующие задачи.

ЗАДАЧИ

1. Биссектриса одного из острых углов прямоугольного треугольника в шесть раз короче гипотенузы. Найти острые углы этого треугольника.

Ответ: $2\arccos 3/4$, $\pi/2 - 2\arccos 3/4$.

2. В остроугольном треугольнике ABC дано: $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{BCA} = \gamma$, проведенная из вершины B медиана имеет длину m. Вычислить площадь треугольника ABC.

Ответ: $\dfrac{m^2 \sin\alpha \sin\gamma \sin(\alpha+\gamma)}{4\sin^2\alpha \sin^2\gamma + \sin^2(\alpha-\gamma)}$.

3. В треугольнике ABC угол $\widehat{BCA}$ равен 60°, а радиус круга, описанного вокруг этого треугольника — $2\sqrt{3}$. На стороне AB взята точка D, так, что $AD = 2 \cdot DB$ и при этом $CD = \sqrt{2}$. Найти площадь треугольника ABC.

Ответ: $3\sqrt{2}$.

4. Найти площадь треугольника ABC, если $AC = 3$, $BC = 4$, а медианы AK и BL взаимно перпендикулярны.

Ответ: $\sqrt{11}$.

5. В остроугольном треугольнике ABC угол $\widehat{BAC}$ равен α. На стороне BC, как на диаметре, построена окружность. Эта окружность пересекает сторону AC в точке P, а сторону AB — в точке Q. Найти отношение площади треугольника APQ к площади треугольника ABC.

Ответ: $\cos^2\alpha$.

6. В треугольник ABC со сторонами $BC = a$, $AC = 2a$ и углом $\widehat{BCA} = 120°$ вписана окружность. Через точки касания этой окружности со сторонами AC и BC и через вершину B проведена вторая окружность. Найти ее радиус.

Ответ: $a\sqrt{6{,}5 - 2\sqrt{7}}$.

7. В треугольнике ABC из вершины угла A на сторону BC опущена медиана, длина которой равна половине среднего геометрического длин сторон AB и AC. Угол $\widehat{BAC}$ равен α. Найти углы α_1 и α_2, на которые медиана делит угол $\widehat{BAC}$, считая, что $\alpha_1 \geq \alpha_2$. Исследовать, при каких значениях α задача имеет решение.

Ответ: $\alpha_1 = \alpha/2 + 1/2 \arccos(2\sin^2\alpha + \cos\alpha)$,

$$\alpha_2 = \alpha/2 - 1/2 \arccos(2\sin^2\alpha + \cos\alpha).$$

Решения существуют при $2\pi/3 \leq \alpha < \pi$.

8. В треугольнике ABC длина стороны BC равна среднему арифметическому длин сторон AB и AC. Угол $\widehat{BAC}$ равен α. Найти углы $\widehat{ABC}$ и $\widehat{BCA}$, считая, что $\widehat{ABC} \geq \widehat{BCA}$. Исследовать, при каких значениях α задача имеет решение.

Ответ: $\widehat{ABC} = (\pi - \alpha)/2 + \arccos(2\sin\alpha/2)$,

$$\widehat{BCA} = (\pi - \alpha)/2 - \arccos(2\sin\alpha/2).$$

Решения существуют при $0 < \alpha \leq \pi/3$.

9. В треугольнике ABC сторона AB имеет большую длину, чем сторона AC, а угол $\widehat{BAC}$ равен α. На стороне AB взята точка D так, что $BD = AC$. Пусть E — середина отрезка AD, а F — середина отрезка BC. Найти угол BEF.

Ответ: $\alpha/2$.

10. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) проведены биссектрисы AD, BE, CF. Найти длину стороны BC, если известно, что $AC = 1$, а вершина A лежит на окружности, проходящей через точки D, E, F.

Ответ: $(\sqrt{17} - 1)/2$.

§ 4. ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ОТРЕЗКИ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

В этом параграфе приводится решение одной полезной планиметрической задачи, связанной с пропорциональным делением отрезков в треугольнике, и основанный на ней метод решения большого количества других задач, в том числе и стереометрических.

Рассмотрим следующую **основную задачу:**

В треугольнике ABC (рис. 46) из вершин A и B к сторонам BC и AC, соответственно, проведены отрезки AD и BE, делящие эти стороны в заданном отношении, т.е.

$$\frac{BD}{DC}=\frac{m}{n},\quad \frac{AE}{EC}=\frac{p}{q}. \qquad (1)$$

Определить, в каком отношении делятся эти отрезки точкой их пересечения, т.е. найти отношения:

$$\frac{BQ}{QE} \text{ и } \frac{AQ}{QD}.$$

Иными словами, известно, в каком отношении отрезки AD и BE делят противоположные вершинам A и B стороны треугольника; требуется определить, в каком отношении они делятся между собой.

Оказывается, что эти отношения не зависят ни от вида треугольника, ни от его сторон, ни от его углов, а определяются лишь отношениями, в которых делятся соответствующие стороны треугольника точками D и E, т.е. пропорциями (1).

Решение 1. Найдем сначала первое из искомых отношений (рис. 46*а*). Для этого выполним вспомогательное построение, характерное для всех задач подобного типа. Проведем отрезок $EF \parallel BC$ (точка F лежит на AD) и обозначим его длину через x, т.е. положим $EF=x$.

Поскольку $\Delta ACD \sim \Delta AEF$, причем коэффициент подобия, согласно второй из пропорций (1), равен $(p+q)/p$, то

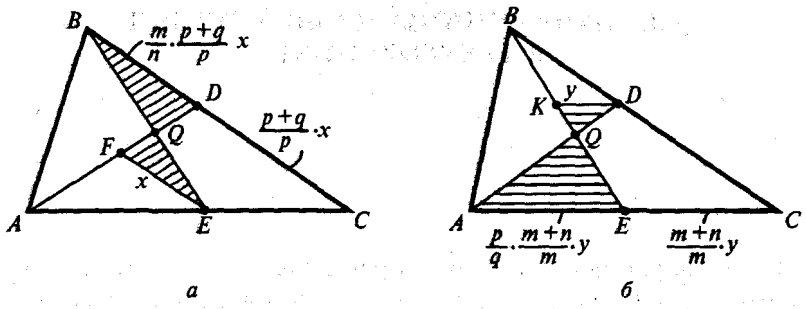


Рис. 46

$$DC = \frac{p+q}{p}\cdot EF = \frac{p+q}{p}\cdot x.$$

Используя затем первую из пропорций (1), находим:

$$BD = m/n\ DC$$

или

$$BD = \frac{m}{n}\cdot\frac{p+q}{p}\cdot x.$$

Наконец, из подобия треугольников BDQ и EFQ находим:

$$\frac{BQ}{QE} = \frac{BD}{FE} = \frac{\frac{m}{n}\cdot\frac{p+q}{p}x}{x} = \frac{m}{n}(1+\frac{q}{p}).$$

Таким образом, $BQ : QE = m/n\cdot(1+q/p)$.

Решение 2. Аналогично находится отношение $AQ : QD$ (рис. 46*б*). Для этого проводится $DK \parallel AC$ (точка K лежит на BE; $KD = y$). Из подобия треугольников ECB и KDB с коэффициентом подобия $(m+n)/m$ имеем:

$$EC = \frac{m+n}{m}\cdot KD = \frac{m+n}{m}\cdot y.$$

Далее находим AE, используя вторую пропорцию (1):

$$AE = \frac{p}{q}\cdot EC = \frac{p}{q}\cdot\frac{m+n}{m}\cdot y.$$

Наконец, из подобия треугольников AEQ и KDQ вычисляем отношение $AQ : QD$:

$$\frac{AQ}{QD}=\frac{AE}{KD}=\frac{\frac{p}{q}\cdot\frac{m+n}{m}y}{y}=\frac{p}{q}\cdot(1+\frac{n}{m}),$$

т.е. $AQ:QD=p/q\cdot(1+n/m)$. Таким образом,

$$\text{если } \frac{BD}{DC}=\frac{m}{n},\ \frac{AE}{EC}=\frac{p}{q},$$

то

$$\frac{BQ}{QE}=\frac{m}{n}\cdot(1+\frac{q}{p}),\ \frac{AQ}{QD}=\frac{p}{q}\cdot(1+\frac{n}{m}).$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. *Найти отношение, в котором делятся медианы треугольника точкой их пересечения.*

Решение. Для рассматриваемого случая $m=n=p=q=1$. Поэтому $BQ:QE=2$ и $AQ:QD=2$. Это означает, что медианы делятся точкой их пересечения в отношении 2 : 1, считая от вершин треугольника.

Пример 2. *На стороне BC треугольника ABC взята точка D, такая, что $BD:DC=2:5$, а на стороне AC — точка E так, что $AE=1/3\,AC$. В каком отношении делятся отрезки BE и AD точкой Q их пересечения.*

Решение. Обратимся к рис. 46*а* и 46*б*. Учитывая, что $AE:EC=1:2$, имеем:

$$KD=y;\ EC=7y/2;\ AE=7y/4.$$

Поэтому $AQ:QD=AE:y=7/4=7:4$ (в частности, $AQ=7/11\cdot AD$).

Аналогично этому имеем:

$$EF=x;\ CD=3x;\ BD=6/5\cdot x.$$

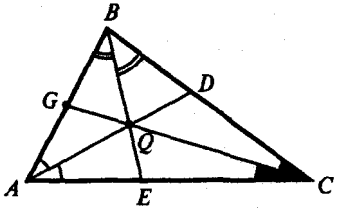
Поэтому $BQ:QE=6/5=6:5$ (в частности, $BQ=6/11\cdot BE$).

Пример 3. *В треугольнике ABC длины сторон AB, BC и AC относятся как 2 : 4 : 5, соответственно. Найти, в каком отношении делятся биссектрисы внутренних углов треугольника точкой Q их пересечения.*

Решение. Используя свойство биссектрисы делить противоположную сторону треугольника на части, пропорциональные заключающим ее сторонам, находим (рис. 47):

$$\frac{AE}{EC}=\frac{2}{4};\ \frac{BD}{DC}=\frac{2}{5};\ \frac{AG}{GB}=\frac{5}{4}.$$

Используя затем результаты решения основной задачи этого параграфа, получаем:



$|AB|:|BC|:|AC|=2:4:5$

Рис. 47

1. $\frac{BQ}{QE}=\frac{2}{5}(1+\frac{4}{2})=\frac{6}{5}.$

2. $\frac{AQ}{QD}=\frac{2}{4}(1+\frac{5}{2})=\frac{7}{4}.$

3. $\frac{CQ}{QG}=\frac{4}{2}(1+\frac{5}{4})=\frac{9}{2}.$

Пример 4. *В треугольнике ABC, площадь которого равна* 18 м^2, *проведены отрезки BE и AD, причем точки E и D лежат соответственно на сторонах AC и BC и делят их в отношении* $AE:EC=3:4$ *и* $BD:DC=2:7$. *Найти площадь четырехугольника CEQD, где Q — точка пересечения отрезков BE и AD.*

Решение. Площадь S_{CEQD} четырехугольника $CEQD$ (рис. 46*б*) равна разности площадей S_{ACD} треугольника ACD и S_{AEQ} треугольника AEQ, т.е.

$$S_{CEQD}=S_{ACD}-S_{AEQ}, \tag{4}$$

$$S_{AEQ}=\frac{AE}{AC}\cdot\frac{AQ}{AD}\cdot S_{ACD}, \tag{5}$$

поскольку ΔAEQ образуется из треугольника ACD путем уменьшения его сторон AC и AD соответственно в AE/AC и AQ/AD раз. Известно, однако (см. § 1), что в этом случае площадь треугольника уменьшается в $(AE\cdot AQ)/(AC\cdot AD)$ раз.

Кроме того, очевидно равенство:

$$S_{ABD}:S_{ACD}=2:7, \tag{6}$$

поскольку треугольники ABD и ACD имеют общую вершину A и основания, лежащие на одной прямой. Отсюда следует, что их площади относятся как длины оснований BD и CD, т.е. как $2:7$.

Таким образом,

$$S_{ACD}=\frac{2}{9}S_{ABC}.$$

Из равенств (1)–(3) следует:

$$S_{CEQD} = S_{ACD} - S_{AEQ} = S_{ACD}\left(1 - \frac{AE \cdot AQ}{AC \cdot AD}\right) =$$

$$= \frac{2}{9}\left(1 - \frac{AE \cdot AQ}{AC \cdot AD}\right) S_{ABC} = 4\left(1 - \frac{AE \cdot AQ}{AC \cdot AD}\right).$$

Учитывая, что по условию $AE : EC = 3 : 4$ или $AE = 3/7 \cdot AC$, получаем:

$$S_{CEQD} = 4\left(1 - \frac{3}{7} \cdot \frac{AQ}{AD}\right)$$

и задача сводится к вычислению отношения AQ/AD. Последнее легко осуществляется рассматриваемым методом. Имеем:

$$KD = y; \quad EC = \frac{9}{2}y; \quad AE = \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{2}y = \frac{27}{8}y.$$

Поэтому $AQ/QD = AE/KD = 27 : 8$ или $AQ = \frac{27}{35} \cdot AD$. После этого находим:

$$S_{CEQD} = 4\left(1 - \frac{3}{7} \cdot \frac{27}{35}\right) = 2\frac{166}{245}.$$

Пример 5. *Каждая из сторон произвольного треугольника ABC разделена на три равные части так, что точки деления D, E и F, лежащие на его сторонах AC, BA и CB соответственно, отсекают по 1/3 длины каждой стороны* ($AD = 1/3AC$, $BE = 1/3BA$, $CF = 1/3CB$) (рис. 48). *Вершины треугольника ABC соединены с точками деления отрезками прямых AF, BD и CE, которые, пересекаясь, образуют треугольник PQR. Какую часть площади треугольника ABC занимает треугольник PQR?*

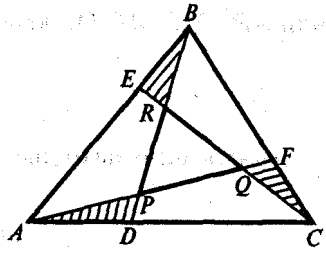


Рис. 48

Решение. Заметим сначала, что суммарная площадь заштрихованных на рис. 48 треугольников APD, BRE и CQF равна площади треугольника PQR. Действительно, с одной стороны, площадь каждого из треугольников ACF, BCE и ABD равна 1/3 площади всего треугольника ABC.

С другой стороны, эти треугольники размещены внутри треугольника ABC таким образом, что площади заштрихованных треугольников перекрываются дважды, в то время как треугольник PQR не покрывается ни разу.

Поскольку

$$S_{ABC} = S_{ACF} + S_{BCE} + S_{ABD}$$

и

$$S_{ABC} = (S_{ACF} + S_{BCE} + S_{ABD}) + S_{PQR} - (S_{APD} + S_{BRE} + S_{CQF}),$$

то очевидно, что

$$S_{PQR} = S_{APD} + S_{BRE} + S_{CQF}.$$

Найдем теперь, какую часть площади треугольника, например, ACF составляет площадь заштрихованного треугольника APD. Имеем:

$$S_{APD} = \frac{AD}{AC} \cdot \frac{AP}{AF} \cdot S_{ACF} = \frac{1}{3} \cdot \frac{AP}{AF} \cdot \frac{1}{3} S_{ABC},$$

$$S_{APD} = \frac{1}{9} \frac{AP}{AF} S_{ABC}.$$

и задача сводится к отысканию отношения AP/AF.

Согласно основной задаче, излагаемой в этом параграфе, можно положить $m/n = BF : FC = 2 : 1$; $p/q = AD : DC = 1 : 2$. Тогда искомое отношение определяется формулой

$$\frac{AP}{AF} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}.$$

или $AP = 3/7 \cdot AF$. Отсюда следует:

$$S_{APD} = \frac{1}{21} S_{ABC}.$$

Аналогично находим:

$$S_{BRE} = S_{CQF} = \frac{1}{21} S_{ABC}.$$

Таким образом, площадь треугольника PQR равна 1/7 площади всего треугольника ABC:

$$S_{PQR} = 3 \frac{1}{21} S_{ABC} = \frac{1}{7} S_{ABC}.$$

Рассмотрим теперь решение задачи, которую можно назвать обратной по отношению к рассмотренной выше. Основной ее вопрос можно сформулировать следующим образом: найти, в каком отношении отрезки AD и BE, проведенные из вершин A и B треугольника ABC к сторонам BC и AC, соответственно, делят эти стороны, если известно, в каком отношении отрезки AD и BE делятся между собой?

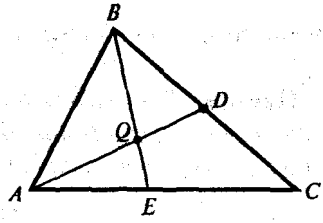


Рис. 49

Задача. *В треугольнике ABC проведены отрезки AD и BE, пересекающиеся в точке Q* (рис. 49) *так что известны отношения:*

$$\frac{AQ}{QD} = \lambda, \quad \frac{BQ}{QE} = \mu.$$

Найти, в каком отношении делятся стороны AC и BC точками E и D, т.е. найти отношения:

$$\frac{AE}{EC} \quad \text{и} \quad \frac{BD}{DC}.$$

Решение. Воспользуемся результатами решения основной задачи, изложенной в этом параграфе. Обозначим искомые отношения через p/q и m/n, соответственно. Тогда имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{p}{q}\left(1+\dfrac{m}{n}\right) = \lambda, \\ \dfrac{m}{n}\left(1+\dfrac{q}{p}\right) = \mu. \end{cases}$$

Перепишем эту систему в виде:

$$\begin{cases} 1+\dfrac{m}{n} = \lambda \cdot \dfrac{1}{p/q}, \\ 1+\dfrac{q}{p} = \mu \cdot \dfrac{1}{m/n}. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \lambda \cdot \dfrac{1}{p/q} - \dfrac{1}{m/n} = 1, \\ -\dfrac{1}{p/q} + \mu \cdot \dfrac{1}{m/n} = 1. \end{cases}$$

Отсюда легко находятся искомые отношения, а именно:

$$\frac{p}{q}=\frac{\lambda\mu-1}{1+\mu},\quad \frac{m}{n}=\frac{\lambda\mu-1}{1+\lambda}.$$

Очевидно, что решение обратной задачи существует при условии $\mu\lambda > 1$.

Пример. *В треугольнике ABC отрезки AD и BC, проведенные из вершин A и B к сторонам BC и AC, соответственно, делятся между собой в следующем отношении:*

$$\frac{AQ}{QD}=\frac{3}{2},\quad \frac{BQ}{QE}=\frac{4}{5}.$$

(Q — точка пересечения отрезков AD и BC). В каком отношении точки E и D делят стороны треугольника?

Решение. Воспользуемся полученными формулами (или проделаем те построения, которые описывались в начале этого параграфа). Тогда находим:

$$\frac{p}{q}=\frac{3/2\cdot 4/5-1}{1+4/5}=\frac{1}{9},$$

$$\frac{m}{n}=\frac{3/2\cdot 4/5-1}{1+3/2}=\frac{2}{35}.$$

Таким образом, $AE/EC=1:9$, $BD/DC=2:25$.

Пример 7. *В треугольнике ABC отрезок AD, проведенный из вершины A к стороне BC, делит последнюю в отношении* $2:3$, *т.е.* $BD:DC=2:3$. *Из вершины B к стороне AC проведен отрезок BE, который пересекается с отрезком AD в точке Q так, что* $BQ=2\cdot QE$. *Найти, в каком отношении точка E делит сторону AC.*

Решение. В этой, *смешанной,* задаче заданы отношения:

$$\frac{BD}{DC}=\frac{2}{3},\quad \frac{BQ}{QE}=\frac{2}{1}.$$

Требуется найти отношение AE/EC. Обозначим отношение AE/EC через p/q и введем неизвестную величину λ, равную отношению отрезков AQ/QD.

Тогда имеем систему уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{p}{q}\left(1+\dfrac{3}{2}\right)=\lambda,\\[2ex] \dfrac{2}{3}\left(1+\dfrac{q}{p}\right)=2,\end{cases}$$

из которой легко определяем, что $p/q = 1/2$ и $\lambda = 5/4$. Это означает, что сторона AC треугольника ABC делится точкой E в отношении $1:2$.

Отметим теперь еще две задачи, которые условно назовем **«задачами о внешних пропорциональных отрезках»**.

Задача. *На сторонах AB и BC треугольника ABC* (рис. 50) *взяты соответственно точки D и E так, что $BD : DA = p : q$ и $BE : EC = m : n$ ($p/q \neq m/n$). Через точки D и E проведена прямая до пересечения в точке Q с прямой AC. Найти отношение $QA : QC$.*

Таким образом, по известному отношению отрезков, на которые делятся боковые стороны треугольника, требуется найти отношение расстояний от точки пересечения прямой, проходящей через точки деления боковых сторон, с основанием до вершин этого основания.

Решение. Аналогично решению предыдущих задач этого параграфа выполним дополнительное построение: проведем отрезок CF параллельно стороне AB (рис. 50). Обозначим длину этого отрезка через x, т.е. положим $CF = x$.

Из подобия ΔBED и ΔCEF с коэффициентом m/n имеем:

$$BD = \frac{m}{n} \cdot CF = \frac{m}{n} \cdot x.$$

Учитывая, что $BD : DA = p/q$, находим DA:

$$DA = \frac{q}{p} \cdot BD = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p} \cdot x.$$

Наконец, из подобия ΔQAD и ΔQCF получаем искомое отношение:

$$\frac{QA}{QC} = \frac{m/n \cdot q/p \cdot x}{x} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p}.$$

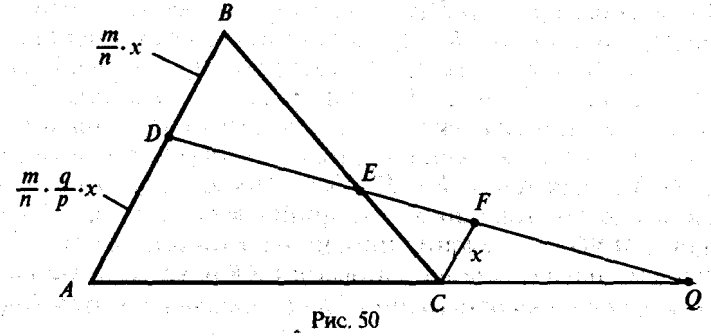


Рис. 50

Отсюда вытекает, что $QC = AC/(mq/np - 1)$. Попутно следует отметить, что если $p/q < m/n$, т.е. $mq > np$, то точка Q лежит на продолжении основания треугольника за точку C, в то время как при $mq < np$ эта точка лежит на продолжении основания за точку A.

Задача. *На продолжении основания AC треугольника ABC за точку C взята точка Q такая, что $QA : QC = \lambda$, а на стороне AB— точка D такая, что $BD : DA = p : q$* (рис. 50). *В каком отношении отрезок DQ, пересекаясь в точке E со стороной BC, делит эту сторону?*

Эта задача является фактически обратной предыдущей.

Решение. Воспользовавшись результатами решения предыдущей задачи, можем записать:

$$\frac{QA}{QC} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p} \quad \text{или} \quad \lambda = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p},$$

где $m/n = BE : EC$. Отсюда находим:

$$\frac{BE}{EC} = \lambda \cdot \frac{p}{q},$$

что дает ответ в этой задаче.

В качестве примера рассмотрим несколько задач из стереометрии.

Пример 8. *В треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина) на боковых ребрах SA, SB и стороне основания AC взяты соответственно точки M, N и P такие, что*

$$\frac{SM}{MA} = \frac{3}{5}, \quad \frac{SN}{NB} = \frac{7}{5}, \quad \frac{AP}{PC} = \frac{2}{5}.$$

Найти, в каком отношении делит сторону основания BC плоскость, проходящая через эти точки.

Решение. Чертеж к этой задаче представлен на рис. 51.

Продолжим прямую MN, лежащую в плоскости грани ASB до ее пересечения в точке K с продолжением стороны основания AB. Поскольку прямая MN лежит в плоскости, проходящей через точки M, N и P, то и точка K лежит в этой плоскости. Соединим точки P и K, принадлежащие плоскости основания пирамиды, отрезком прямой, пересекающимся со стороной основания BC в точке Q. Так как точки P и K лежат в плоскости, о которой идет речь в задаче, то этой плоскости принадлежит и точка Q; четырехугольник $MNQP$ — сечение пирамиды этой плоскостью.

Найдем сначала, где на основании AB находится точка K. Для этого вынесем плоскость грани ASB на отдельный чертеж (рис. 52*а*).

Выполним дополнительное построение: проведем $BG \parallel AC$ и обозначим $x = BF$. Имеем:

$$SM = \frac{7}{5}x, \quad \text{т.к.} \quad SN : NB = 7 : 5;$$

$$MA = \frac{5}{3} \cdot SM = \frac{7}{3}x,$$

откуда следует, что $AK : BK = 7 : 3$.

Перейдем теперь к рассмотрению плоскости основания пирамиды ABC (рис. 52*б*). Проведем $BG \parallel AC$ и обозначим $y = BG$.

Имеем:

$$AP = \frac{7}{3}y, \quad \text{т.к.} \quad AK : BK = 7 : 3;$$

$$PC = \frac{3}{2} \cdot AP = \frac{7}{2}y.$$

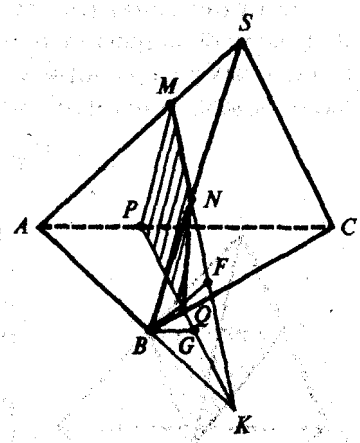


Рис. 51

Откуда следует, что $CQ : QB = 7 : 2$.

Итак, точка Q делит сторону основания BC в отношении $7 : 2$.

Пример 9. *На продолжении стороны AC основания треугольной пирамиды SABC (S — вершина) взята точка D, такая, что DC = 1/2AC. Найти отношение объемов тел, на которые делит пирамиду плоскость сечения, проходящая через точку D и середины ребер SA и SB.*

Решение. Пусть E — середина ребра SA, а F — середина ребра SB (рис. 53). Поскольку точки E и D принадлежат сечению, то этому сечению принадлежит и вся прямая ED, в том числе и точка Q ее пересечения с ребром SC пирамиды. Соединив точки E, F и Q

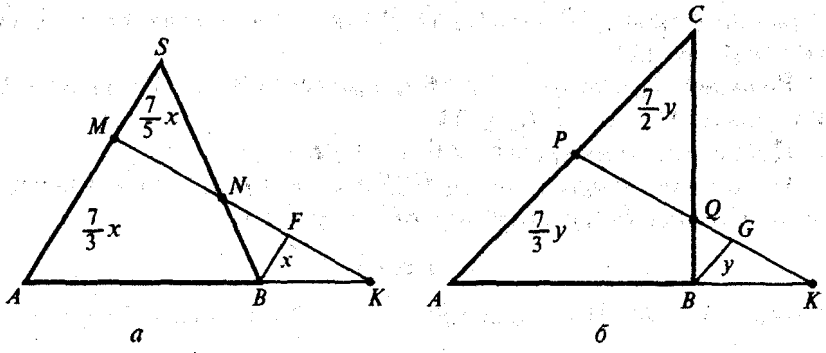


Рис. 52

попарно отрезками прямых, получим сечение пирамиды, о котором идет речь в задаче.

Нетрудно заметить, что объем треугольной пирамиды $SEFQ$, получаемый из треугольной пирамиды $SABC$ путем изменения длин ее боковых ребер соответственно в k, m и n раз, составляет kmn-ю часть объема пирамиды $SABC$, т.е.

$$V_{SEFQ} = k\,m\,n \cdot V_{SABC}.$$

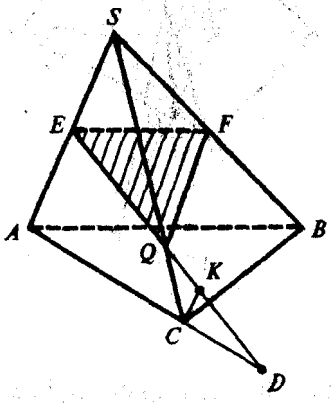


Рис. 53

Поскольку $ES : AS = 1/2$, $FS : BS = 1/2$, то $k = m = 1/2$ и для применения последней формулы необходимо знать n, т.е. в каком отношении точка Q делит ребро SC.

Рассмотрим боковую грань ASC пирамиды. Как обычно, выполним дополнительное построение, состоящее в проведении $CK \parallel AS$. Имеем $x = CK$. Далее находим: $AE = 3x$, поскольку $AD : DC = 3$, $ES = AE = 3x$. Из подобия треугольников QES и QCK получаем: $SQ : QC = 3 : 1$. Следовательно, $SQ = 3/4 \cdot SC$. Имеем:

$$V_{SEFQ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot V_{SABC} = \frac{3}{16} V_{SABC},$$

или $V_{SEFQ} : V_{EFQABC} = 3 : 13$.

Пример 10. *На продолжении стороны AC треугольника ABC отложена точка D, такая что $DC = 1/2 \cdot AC$, а на стороне BC — точка E, которая делит эту сторону в отношении $BE : EC = 1 : 2$. Точка D соединена с серединой F стороны AB отрезком прямой, которая пересекает AE в точке Q. В каком отношении точка Q делит отрезок AE?*

Решение. Проведем $CK \parallel AB$ и примем $CK = x$. Тогда $AF = 3x$, поскольку $AD = 3 \cdot CD$ (рис. 54).

Поскольку, однако, $AF = FB$, то и $FB = 3x$.

Из подобия треугольников GBF и GCK, где G — точка пересечения отрезка DF со стороной BC, получаем:

$$BG : CG = 3 : 1$$

или $BG = 3/4 \cdot BC$. По условию $BE = = 1/3 \cdot BC$; значит, $EG = 5/12 \cdot BC$.

Проведем далее отрезок CL параллельно отрезку AE и примем $CL = y$. Тогда имеем: $AQ = 3y$, поскольку $AD = 3 \cdot CD$, а из подобия треугольников GQE и GKC с коэффициентом подобия $5/12 : (1 - 1/3 - 5/12) = 5 : 3$ следует, что $QE = 5/3 \cdot y$.

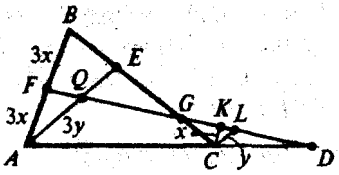


Рис. 54

Составляя отношение AQ к QE, получаем:

$$\frac{AQ}{QE} = \frac{3y}{5/3 \cdot y} = 9 : 5.$$

ЗАДАЧИ

1. В треугольнике ABC на стороне AB взята точка K так, что $AK : BK = 1 : 2$, а на стороне BC взята точка L так, что $CL : BL = 2 : 1$. Пусть Q — точка пересечения прямых AL и CK. Найти площадь треугольника ABC, если дано, что площадь треугольника BQC равна 1.

Ответ: 7/4.

2. В треугольнике ABC, площадь которого равна 6, на стороне AB взята точка K, делящая эту сторону в отношении $AK : BK = 2 : 3$, а на стороне AC — точка L, делящая AC в отношении $AL : LC = 5 : 3$. Точка Q пересечения прямых CK и BL удалена от прямой AB на расстояние 1,5. Найти длину стороны AB.

Ответ: 6,4.

3. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка K так, что $AK = 1$, $KC = 3$, а на стороне AB взята точка L так, что $AL : LB = 2 : 3$. Пусть Q — точка пересечения прямых BK и CL. Площадь треугольника AQC равна 1. Найти длину высоты треугольника ABC, опущенной из вершины B.

Ответ: 3/2.

4. На продолжении стороны AB треугольника ABC отложен отрезок AD так, что $AD : AB = \alpha$. На продолжении медианы BE отложен отрезок EF так, что $EF : BE = \beta$. Найти отношение площадей треугольников BDF и ABC.

Ответ: $(\alpha - 1)(\beta + 1)/2$.

5. На стороне AB треугольника ABC между точками A и B взята точка D так, что $AD : AB = \alpha (\alpha < 1)$. На стороне BC между точками

B и C взята точка E так, что $BE : BC = \beta$ ($\beta < 1$). Через точку E проведена прямая, параллельная стороне AC и пересекающая сторону AB в точке F. Найти отношение площадей треугольников BDE и BEF.

Ответ: $(1 - \alpha)/\beta$.

6. Дан треугольник ABC. На стороне AC берется точка K, а на стороне BC — точка M таким образом, что

$$\frac{CK}{KA} = 5, \quad \frac{S_{KMC}}{S_{AKMB}} = \frac{5}{6}.$$

Найти $CM : MB$.

Ответ: 6/5.

7. Дан треугольник ABC, площадь которого равна 1. На медианах AK, BL и CN треугольника ABC взяты соответственно точки P, Q и R так, что

$$\frac{AP}{PK} = 1, \quad \frac{BQ}{QL} = \frac{1}{2}, \quad \frac{CR}{RN} = \frac{5}{4}.$$

Найти площадь треугольника PQR.

Ответ: 1/12.

8. На сторонах выпуклого четырехугольника $ABCD$, площадь которого равна 1, взяты точки: K на AB, L на BC, M на CD и N на AD. При этом

$$\frac{AK}{KB} = 2, \quad \frac{BL}{LC} = \frac{1}{3}, \quad \frac{CM}{MD} = 1, \quad \frac{DN}{NA} = \frac{1}{5}.$$

Найти площадь шестиугольника $AKLCMN$.

Ответ: 11/12.

9. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты соответственно точки P, Q, R такие, что $AP = 1/k \cdot AB$, $BQ = 1/m \cdot BC$ и $CR = 1/n \cdot CA$, где k, m, n — натуральные числа, превосходящие 1. Точка A соединена с точкой Q, точка B — с точкой R, точка C — с точкой P. Найти отношение площади треугольника, вершинами которого служат точки пересечения отрезков AQ, BR и CP, к площади треугольника ABC.

Ответ: $1-1/k-1/m-1/n+\frac{1}{(m-1)k^2+k}+\frac{1}{(k-1)m^2+m}+\frac{1}{(n-1)m^2+m}$.

10. На продолжении ребра SC треугольной пирамиды $SABC$ (S — вершина) отложена точка D, такая, что $CD=1{,}5\cdot SC$, а на ребрах SA и SB взяты соответственно точки E и F, причем $SE=1/3\cdot SA$ и $SF=2/3\cdot SB$. В каком отношении делит объем пирамиды плоскость, проходящая через точки D, E и F?

Ответ: 472/815.

§ 5. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ОКРУЖНОСТЕЙ, УГЛОВ И ТРЕУГОЛЬНИКОВ

В предыдущих параграфах уже шла речь об окружностях, кругах и их основных элементах. В частности, отмечалось, что центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на пересечении его биссектрис, а центр окружности, описанной около треугольника, — на пересечении срединных перпендикуляров к его сторонам. Там же приводились наиболее используемые формулы для вычисления радиусов окружностей.

Остановимся теперь на решении различных задач, связанных с расположением окружностей друг относительно друга, а также окружностей, углов и треугольников. Задачи подобраны таким образом, чтобы их решения демонстрировали основные приемы и элементы решения других, более сложных задач.

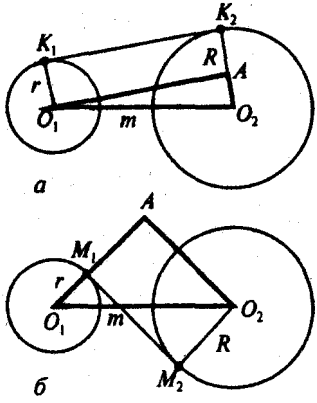


Рис. 55

Задача. *Центр O_1 окружности радиуса r удален на расстояние m от центра второй окружности O_2 радиуса R ($R > r$, $m > r + R$). Найти длины общих касательных к этим окружностям.*

Решение. Известно, что при условии $m > r + R$ окружности имеют четыре общие касательные (две внешние и две внутренние) с попарно равными длинами (рис. 55).

Длины внешних касательных, например, (K_1, K_2), находятся следующим образом. Проводим $O_1A \parallel K_1K_2$ и рассматриваем прямоугольный треугольник O_1AO_2 (рис. 55*а*). Из него находим: $O_1A^2 = O_1O_2^2 - O_2A^2$. Очевидно, что $O_2A = R - r$. Поэтому

$$K_1K_2 = O_1A = \sqrt{m^2 - (R-r)^2} = \sqrt{(m+R-r)(m+r-R)}.$$

Длина внутренней касательной, например, M_1M_2, находится почти аналогично. Строится $O_2A \parallel M_1M_2$ и рассматривается прямоугольный треугольник O_1AO_2 (рис. 55*б*). Из него находится:

$$O_2A^2 = O_1O_2^2 - O_1A^2.$$

Поскольку $O_1A = R + r$, то

$$M_1M_2 = O_2A = \sqrt{m^2 - (R+r)^2} = \sqrt{(m+R+r)(m-r-R)}.$$

Рассмотрим еще одну задачу о взаимном расположении двух окружностей.

Задача. *Центр O_1 первой окружности радиуса r удален на расстояние m от центра O_2 второй окружности радиуса R ($R > r$). Найти длину дуги первой окружности, заключенной внутри второй окружности.*

Решение. Определим сначала, при каких m задача имеет решение (рис. 56).

Если $m > R + r$, то окружности, как это имело место в предыдущей задаче, не пересекаются; при $m = R + r$ они касаются внешним образом друг друга, а при

$$R - r < m < R + r$$

окружности пересекаются в двух точках. При

$$0 \le m < R - r$$

меньшая из окружностей целиком попадает внутрь второй окружности.

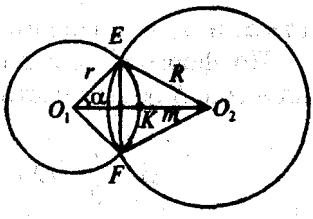


Рис. 56

Таким образом, задача имеет решения при $R - r \le m \le R + r$.

Пусть E и F — точки пересечения окружностей. Длина $\overset{\smile}{EF}$ искомой дуги равна удвоенной длине дуги $\overset{\smile}{EK}$, т.е.

$$\overset{\smile}{EF} = 2 \cdot \overset{\smile}{EK} = 2\alpha r,$$

где α — величина центрального угла EO_1K.

Для нахождения α используем теорему косинусов. Из треугольника O_1EO_2 имеем:

$$EO_2^2 = EO_1^2 + O_1O_2^2 - 2EO_1 \cdot O_1O_2 \cdot \cos\alpha$$

или

$$R^2 = r^2 + m^2 - 2rm\cos\alpha,$$

$$\cos\alpha = \frac{r^2 + m^2 - R^2}{2rm}.$$

Таким образом:

$$\overset{\smile}{EF} = 2r \cdot \arccos \frac{r^2 + m^2 - R^2}{2rm}.$$

При этом, если $m = r + R$, то $\overset{\smile}{EF} = 0$; если $m = R - r$, то $\overset{\smile}{EF} = 2\pi r$, т.е. длине первой окружности.

Задача. *Найти площадь общей части двух кругов радиусов r и R ($R > r$), центры которых находятся на расстоянии m друг от друга ($R - r \le m \le R + r$).*

Решение. Аналогично предыдущей задаче (рис. 56) находим:

$$\alpha_1 = \arccos \frac{r^2 + m^2 - R^2}{2rm},$$

$$\alpha_2 = \arccos \frac{R^2 + m^2 - r^2}{2Rm},$$

где α_1 и α_2 — половины углов EO_1F и EO_2F соответственно.

По формуле для площади сегмента, см. § 1, получаем, что площадь S общей части кругов выражается суммой:

$$S = \frac{1}{2} r^2 (2\alpha_1 - \sin 2\alpha_1) + \frac{1}{2} R^2 (2\alpha_2 - \sin 2\alpha_2).$$

Здесь $\sin 2\alpha_1$ можно вычислить по формуле:

$$\sin 2\alpha_1 = 2\cos\alpha_1 \cdot \sin\alpha_1 = 2 \cdot \frac{r^2 + m^2 - R^2}{2rm} \cdot \sin\arccos \frac{r^2 + m^2 - R^2}{2rm} =$$

$$= \frac{r^2 + m^2 - R^2}{rm} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{r^2 + m^2 - R^2}{2rm}\right)^2}.$$

Аналогично

$$\sin 2\alpha_2 = \frac{R^2 + m^2 - r^2}{Rm} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{R^2 + m^2 - r^2}{2rm}\right)^2}.$$

В обеих задачах ответ значительно упрощается, если окружности имеют одинаковые радиусы, т.е. $R = r$.

Пример. *Около прямоугольного треугольника описана окружность. Другая окружность того же радиуса касается катетов этого треугольника так, что одной из точек касания является вершина треугольника. Найти отношение площади треугольника к площади общей части данных кругов.*

Решение. Обозначим радиус окружностей через R. Тогда $AO_1 = BO_1 = CO_1 = R$ (рис. 57). Поскольку точка O_2 — центр окружности, касающейся катетов AB и BC, то (BO_1) — биссектриса прямого угла треугольника, $(AO_2) \perp (AB)$, $(AO_2) \perp (BC)$. Следовательно, угол ABO_2 равен 45° и $AB = AO_2 = R$.

Так как $AB = AO_1 = BO_1 = R$, то ΔABO_1 равносторонний и его высота EO_1 равна $R\sqrt{3}/2$. Кроме того, $AE = R/2$.

Проведем $O_1F \parallel AB$. Тогда $O_1F = AE = R/2$; $O_2F = R - R\sqrt{3}/2 = R(2-\sqrt{3})/2$. Следовательно,

$$m = O_1O_2 = \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left[\frac{R}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)\right]^2} = R\cdot\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, эта задача свелась к предыдущей, поскольку теперь известны не только радиусы окружностей, но и расстояние между их центрами. Площадь общей части двух кругов находится по формуле, полученной в предыдущей задаче, если в ней положить $r = R$. Имеем:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin 60^\circ = \frac{R^2\sqrt{3}}{2},$$

$$S = R^2(2\alpha - \sin 2\alpha),$$

и отношение площадей S_{ABC}/S равно:

$$\frac{S_{ABC}}{S} = \frac{\sqrt{3}/2}{2\alpha - \sin 2\alpha},$$

где $\alpha = \arccos m/2R$.

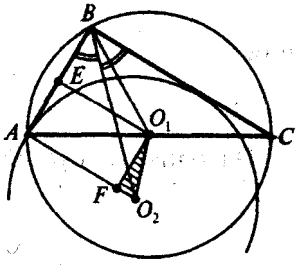


Рис. 57

Рассмотрим теперь несколько задач, в которых речь пойдет об окружностях, касающихся друг друга, а также некоторой прямой.

Задача. *Две окружности с радиусами r и R касаются друг друга и некоторой пря-*

мой. Найти радиус третьей окружности, касающейся первых двух и данной прямой.

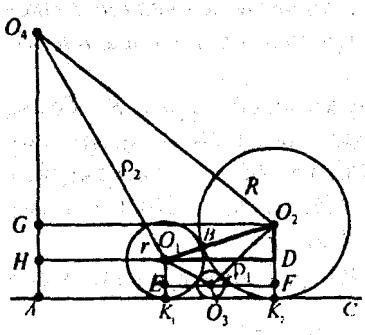


Рис. 58

Решение. Очевидно, если $r \neq R$, то задача имеет два решения (рис. 58).

Одна из окружностей вписана в криволинейную область K_1BK_2, другая касается данных окружностей и прямой внешним образом.

Пусть O_1 и O_2 — центры двух окружностей (примем, что $R > r$), а O_3 — центр третьей (меньшей) окружности, причем радиус этой последней обозначим ρ_1. Расстояние между центрами O_1 и O_2 равно $r + R$. Аналогично: $O_1O_3 = r + \rho_1$ и $O_2O_3 = R + \rho_1$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник O_1O_2D, где D — проекция точки O_1 на перпендикуляр O_2K_2 к прямой AC.

Идея решения состоит в том, чтобы, записав длину отрезка O_1D двумя различными способами (один раз через r и R как сторону прямоугольного треугольника O_1O_2D, другой — через r, R и ρ_1 как длину равного ему отрезка EF), получить уравнение для нахождения радиуса ρ_1.

Из прямоугольного треугольника O_1O_2D имеем:

$$O_1D = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{rR}.$$

Из прямоугольных треугольников O_1O_3E и O_2O_3F находим:

$$O_3E = 2\sqrt{\rho_1 r}, \quad O_3F = 2\sqrt{\rho_1 R}.$$

После этого составляем уравнение:

$$2\sqrt{rR} = 2\sqrt{r\rho_1} + 2\sqrt{R\rho_1},$$

или

$$\sqrt{rR} = \sqrt{\rho_1}(\sqrt{r} + \sqrt{R}).$$

Находим радиус искомой окружности:

$$\rho_1 = \frac{rR}{(\sqrt{r} + \sqrt{R})^2}.$$

Аналогично находим радиус ρ_2 большей окружности. Ее центр обозначим O_4, а проекции точек O_1 и O_2 на перпендикуляр, опущенный из центра O_4 на прямую AC — через H и G соответственно.

Очевидны следующие равенства:

$$O_1H = \sqrt{(\rho_2 + r)^2 - (\rho_2 - r)^2} = 2\sqrt{\rho_2 r},$$

$$O_2G = \sqrt{(\rho_2 + R)^2 - (\rho_2 - R)^2} = 2\sqrt{\rho_2 R},$$

$$O_1D = \sqrt{(r + R)^2 - (r - R)^2} = 2\sqrt{rR}.$$

Поэтому уравнение для определения ρ_2 запишется следующим образом:

$$2\sqrt{rR} = 2\sqrt{\rho_2 R} - 2\sqrt{\rho_2 r},$$

откуда находим:

$$\rho_2 = \frac{rR}{(\sqrt{R} - \sqrt{r})^2}.$$

Особый класс представляют задачи, в которых две касающиеся друг друга окружности вписаны в некоторый угол. Оказывается, величина такого угла определяется только отношением радиусов данных окружностей. Справедливо и обратное утверждение: при заданной величине угла отношение радиусов таких окружностей однозначно определено.

Задача. *В угол BAC, величина которого равна α, вписаны две окружности, касающиеся друг друга и сторон угла. Определить отношение радиусов этих окружностей.*

Решение. Легко видеть, что центр любой окружности, вписанный в угол BAC лежит на биссектрисе этого угла, поскольку именно биссектриса является геометрическим местом точек, равноудаленных от сторон угла. Поэтому точка O, центр данной окружности, и точка O_1, центр любой окружности, касающейся ее сторон и угла (очевидно, что таких окружностей будет две) лежит на биссектрисе угла BAC.

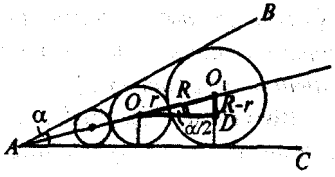


Рис. 59

Проведем $OD \parallel AC$, где точка D лежит на перпендикуляре, опущенном из центра окружности O_1 на сторону AC (рис. 59).

Основным приемом, позволяющим связать радиусы окружностей с величиной угла, в который они вписаны, является использование соотношения в прямоугольном треугольнике OO_1D: гипотенуза в этом треугольнике равна сумме радиусов окружностей, поскольку те касаются друг друга, один из катетов, а именно O_1D, равен разности этих радиусов, поскольку окружности касаются прямой (AC), а острый угол равен $-\alpha/2$, так как центры окружностей лежат на биссектрисе.

Имеем

$$OO_1 = r + R,\ OD = R - r,\ \widehat{O_1OD} = \alpha/2.$$

Отсюда следует:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{R-r}{R+r} \quad \text{или} \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1-r/R}{1+r/R}.$$

Разрешая это уравнение относительно r/R, получаем:

$$\frac{r}{R} = \frac{1-\sin(\alpha/2)}{1+\sin(\alpha/2)}.$$

Таким образом, отношение радиуса меньшей окружности к радиусу большей зависит только от величины угла, в который эти окружности вписаны. Поэтому радиус меньшой окружности, касающейся сторон угла BAC и данной окружности, относится к радиусу данной так же, т.е. как

$$(1-\sin\frac{\alpha}{2})/(1+\sin\frac{\alpha}{2}).$$

Пример. *В треугольнике ABC размещена система бесконечного числа кругов, причем первый из них вписан в треугольник ABC, а каждый следующий круг касается предыдущего и сторон угла ABC. Какую площадь занимает система кругов, если стороны AB и BC треугольника соответственно равны 1 и 2, а угол, заключенный между ними, составляет 60°?*

Решение. Прежде всего можно заметить, что радиусы кругов, а значит, и их площади, образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию. Действительно, решение предыдущей задачи показывает, что отношение радиусов последовательных кругов одно и то же и равно:

$$\frac{r_{k+1}}{r_k} = \frac{1-\sin(\alpha/2)}{1+\sin(\alpha/2)} = \frac{1-\sin 30^\circ}{1+\sin 30^\circ} = \frac{1}{3},$$

где r_k — радиус k-го круга. Таким образом, площади кругов S_{k+1} и S_k, относящиеся как квадраты их радиусов, относятся как 1 : 9, т.е.

$$S_{k+1} = \frac{1}{9} S_k,$$

а S — сумма площадей всей системы кругов определяется выражением:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + ... = \frac{S_1}{1-1/9} = \frac{9}{8} S_1 .$$

Здесь использована формула для суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем 1/9.

После этого остается вычислить площадь S_1 круга, вписанного в треугольник ABC.

По теореме косинусов вычисляем третью сторону треугольника:

$$AC^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cos 60^\circ = 3,$$

$$AC = \sqrt{3} .$$

Затем находим площадь треугольника ABC:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Вычисляем радиус вписанного круга:

$$r_1 = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{\sqrt{3}/2}{(1+2+\sqrt{3})/2} = \frac{1}{1+\sqrt{3}}$$

и его площадь:

$$S_1 = \pi r_1^2 = \frac{\pi}{4+2\sqrt{3}}.$$

После этого суммарная площадь кругов определяется выражением:

$$S = \frac{9\pi}{32+16\sqrt{3}}.$$

Рассмотрим теперь несколько задач, в которых речь идет об окружностях, касающихся только одной из сторон угла и пересекающих другую его сторону в различных точках.

Задача. *На луче AB, являющемся одной из сторон угла BAC, даны две точки P и Q. Построить окружность, проходящую через точки P и Q и касающуюся другой стороны AC угла.*

Решение. Пусть такая окружность построена (рис. 60), и M — точка ее касания с лучом AC. Поскольку точки P и Q заданы, то можно считать известными расстояния AP и AQ.

По теореме о касательной AM и секущей AQ, проведенных к окружности из одной точки A, имеем:

$$AM^2 = AQ \cdot AP,$$

т.е. квадрат длины касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть. Отсюда находим:

$$AM = \sqrt{AQ \cdot AP},$$

т.е. длина отрезка AM является средним геометрическим длин отрезков AQ и AP.

Построить отрезок AM можно следующим образом: отложим на прямой последовательно отрезки K_1K_2 и K_2K_3, равные по длине отрезкам AP и AQ; затем с помощью циркуля и линейки разделим отрезок K_1K_3 пополам; принимая середину отрезка K_1K_3 за центр окружности, опишем эту окружность радиусом $1/2 \cdot K_1K_3$; из точки K_2 восстановим перпендикуляр к K_1K_3 до его пересечения с окружностью в точке L. Длина отрезка LK_2 и будет средним геометрическим длин отрезков AP и AQ.

Действительно, ΔK_1LK_3 — прямоугольный, поскольку угол K_1LK_3 опирается на диаметр окружности. Тогда отрезок LK_2, являющийся по построению высотой прямоугольного треугольника, будет иметь длину, равную среднему геометрическому длин отрезков гипотенузы, на которые ее делит точка K_2, т.е.

$$LK_2 = \sqrt{K_1K_2 \cdot K_2K_3} \text{ или } LK_2 = \sqrt{AQ \cdot AP},$$

что и требовалось доказать.

Отложив на луче AC от точки A расстояние, равное $AM = LK_2$, получим третью точку, через которые должна проходить искомая окружность, ее центр находится как точка пересечения срединных перпендикуляров к отрезкам PQ, QM или PM.

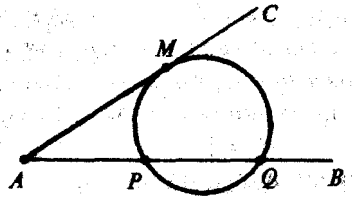


Рис. 60

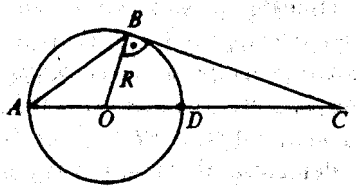


Рис. 61

Таким образом, соотношение длин отрезков, высекаемых на стороне угла окружностью, и отрезка касательной, образуемой на другой его стороне, регулируется теоремой о касательной и секущей.

Пример 1. *Центр окружности, касающейся стороны BC треугольника ABC в точке B и проходящей через A, лежит на отрезке AC. Найти площадь треугольника ABC, если известно, что* $BC = 6$, $AC = 9$.

Решение. Пусть окружность с центром O проходит через точку A треугольника ABC и касается стороны BC в точке B (рис. 61); D — вторая точка пересечения стороны AC с окружностью.

По теореме о касательной и секущей, проведенными из одной точки к окружности, находим:

$$AC \cdot CD = BC^2,$$

$$9 \cdot CD = 36 \Rightarrow CD = 4.$$

Следовательно, $AD = 5$; радиус $R = 2{,}5$.

Площадь треугольника ABC можно определить по формуле:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin \widehat{ACB}.$$

Соединив центр O с вершиной B, получим прямоугольный треугольник OBC, из которого найдем:

$$\sin \widehat{ACB} = \frac{5}{13}.$$

Подставив значения AC и BC из условия задачи и найденное значение синуса в формулу для площади треугольника ABC, получим:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 \cdot \frac{5}{13} = \frac{135}{13}.$$

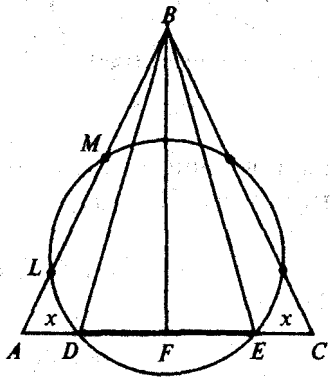


Рис. 62

Пример 2. *Каждая из боковых сторон AB и BC равнобедренного треугольника ABC разделена на три равные части, и через четыре точки деления на этих сторонах проведена окружность, высекающая из основания AC хорду DE. Найти отношение площадей треугольников ABC и BDE, если AB = BC = 3 и AC = 4.*

Решение. Чертеж к этой задаче представлен на рис. 62.

Пусть F — середина стороны AC, а L и M — точки деления боковой стороны AB, так что $AL = 1$ и $AM = 2$. Обозначим, кроме того, $AD = x$.

По теореме о касательной и секущей имеем:

$$AL \cdot AM = AD \cdot AE,$$

или

$$1 \cdot 2 = x(4 - x).$$

Отсюда находим, что

$$x = 2 - \sqrt{2},$$

поскольку, очевидно, что $x < 2$. Следовательно, $DE = 2 \cdot DF = 2\sqrt{2}$. Треугольники ABC и BDE имеют одинаковые высоты, поэтому их площади относятся как длины оснований, т.е. $S_{ABC} : S_{BDE} = 2 : \sqrt{2}$.

Пример 3. *В треугольнике ABC : AB = $\sqrt{14}$, BC = 2. Окружность проходит через точку B, через середину отрезка BC, через точку E на отрезке AB и касается стороны AC. Найти отношение, в котором эта окружность делит отрезок AB, если DE — диаметр этой окружности.*

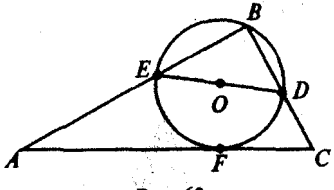


Рис. 63

Решение. Пусть F — точка касания окружности со стороной AC треугольника (рис. 63). Поскольку угол EBD опирается на диаметр окружности, то он — прямой, и треугольник ABC — прямоугольный. Его гипотенуза находится по теореме Пифагора: $AC = 3\sqrt{2}$.

По теореме о касательной и секущей, в данном случае проведенных из точки C, легко найти длину отрезка FC. Имеем:

$$FC^2 = CD \cdot CB \text{ или } FC^2 = 1 \cdot 2 \Rightarrow FC = \sqrt{2}.$$

Тогда

$$AF = AC - FC = 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

Обозначим $AE = x$. По той же теореме для касательной AF и секущей AB получаем:

$$AF^2 = AE \cdot AB$$

или

$$(2\sqrt{2})^2 = x\sqrt{14},$$

откуда находим $x = 4\sqrt{14}/7$. Тогда

$$EB = \sqrt{14} - x = 3\sqrt{14}/7.$$

Таким образом, $AE : EB = 4 : 3$.

ЗАДАЧИ

1. Центры двух кругов с одинаковыми радиусами, равными 2, находятся на расстоянии $2\sqrt{3}$ один от другого. Найти площадь той части каждого из этих кругов, которая не принадлежит другому кругу.

Ответ: $(8\pi + 6\sqrt{3})/3$.

2. Сторона AB треугольника ABC является хордой некоторой окружности. Стороны AC и BC лежат внутри окружности, продолжение стороны AC пересекает окружность в точке D, а продолжение стороны BC —в точке E, причем $AB = AC = CD = 2$, $EC = \sqrt{2}$. Чему равен радиус окружности?

Ответ: $\sqrt{5}$.

3. На стороне BC треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая отрезок AB в точке D. Найти отношение площадей треугольников ABC и BCD, если известно, что $AC = 15$, $BC = 20$ и $\widehat{ABC} = \widehat{ACD}$.

Ответ: 25 : 16.

4. Окружность касается стороны BC треугольника ABC в ее середине, проходит через точку A, а отрезки AB и AC пересекает в точках D и E, соответственно. Найти величину угла BAC, если известно, что $BC = 12$, $AD = 3{,}5$ и $EC = 9/\sqrt{5}$.

Ответ: 90°.

5. A, B, C и D — последовательные вершины прямоугольника. Окружность проходит через точки A и B и касается стороны CD в

ее середине. Через точку D проведена прямая, которая касается той же окружности в точке E, а затем пересекает продолжение стороны AB в точке K. Найти площадь трапеции $BCDK$, если известно, что $AB = 10$ и $KE : KA = 3 : 2$.

Ответ: 210.

6. Сторона AB квадрата $ABCD$ имеет длину 1 см. Она же является хордой некоторой окружности, причем все остальные стороны квадрата лежат вне этой окружности. Длина касательной CK, проведенной из вершины C к той же окружности, равна 2 см. Чему равен диаметр окружности?

Ответ: $\sqrt{10}$ см.

7. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC имеет длину 2 см и является хордой некоторой окружности. Катет AC равен 1 см и лежит внутри окружности, а его продолжение пересекает окружность в точке D, причем $CD = 3$ см. Чему равен радиус окружности?

Ответ: 2 см.

8. В прямоугольном треугольнике ABC с катетами $AB = 3$ и $BC = 4$ через середины сторон AB и AC проведена окружность, касающаяся стороны BC. Найти длину отрезка гипотенузы AC, который лежит внутри этой окружности.

Ответ: 1,1.

9. Три окружности расположены на плоскости так, что каждая из них внешним образом касается двух других. Радиусы окружностей относятся как 1 : 2 : 3. Вычислить углы треугольника, вершины которого расположены в точках касания.

Ответ: $\pi/4$; arctg 2; arctg 3.

10. Центры трех окружностей различных радиусов расположены на одной прямой, а центр четвертой находится на расстоянии d от этой прямой. Найти радиус четвертой окружности, если известно, что каждая из этих окружностей касается трех других.

Ответ: $d/2$.

§ 6. ТРАПЕЦИИ, ПАРАЛЛЕЛОГРАММЫ, ПРОИЗВОЛЬНЫЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

Изучение этой группы фигур начнем с трапеции. Как уже отмечалось, трапеция —это выпуклый четырехугольник, две стороны которого (основания) параллельны друг другу, а две другие стороны (боковые) — непараллельны. Сумма внутренних углов, прилежащих к каждой боковой стороне трапеции, равна 180°; точка пересечения диагоналей трапеции лежит на прямой, соединяющей середины оснований; длина средней линии трапеции равна полусумме длин оснований, а площадь трапеции — произведению полусуммы длин оснований на высоту (§ 1). Если в трапецию можно вписать окружность, то сумма длин боковых сторон равна сумме длин оснований, причем справедливо также и обратное утверждение: если сумма длин боковых сторон трапеции равна сумме длин оснований, то в трапецию можно вписать окружность. Для того, чтобы трапецию можно было вписать в окружность, необходимо и достаточно, чтобы она была равнобочной (см. задачу 7, § 1).

Установим прежде всего число параметров, необходимое для того, чтобы задать трапецию. Покажем, что вообще говоря, таких параметров четыре. Чтобы пояснить сказанное, рассмотрим следующие три задачи на построение.

Задача 1. *Построить трапецию по четырем сторонам (a и b —основания трапеции, c и d— боковые стороны).*

Решение. Предположим, такая трапеция построена (рис. 64). Имеем: $AD = a$, $BC = b$, $AB = c$, $CD = d$.

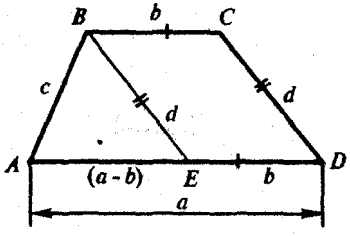


Рис. 64

Пусть, например, $a > b$. Возьмем на AD точку E, такую, что $BE \parallel CD$. Тогда $AE = a - b$, $BE = CD = d$. Следовательно, в треугольнике ABE известны длины всех сторон и, значит, его можно построить. Очевидно, как построенный треугольник достроить до трапеции.

Построение осуществляется в следующей последовательности. Сначала (известным способом) по трем сторонам c, d и $(a-b)$ строится треугольник ABE. Затем на продолжении отрезка AE за точку E откладывается отрезок ED длиной b, наконец, через точки B и D проводятся прямые BC и CD, параллельные прямым ED и EB. Четырехугольник $ABCD$ есть искомая трапеция.

Действительно, $BC \parallel AD$ по построению, а AB и CD —непараллельны. Следовательно, $ABCD$ — трапеция. Далее: $AB = c$, $BE = CD = d$, $BC = ED = b$ — как стороны параллелограмма.

Очевидно, что задача имеет единственное решение, если только a, b, c и d таковы, что по трем отрезкам с длинами c, d и $|a-b|$ можно построить треугольник.

Решение этой задачи показывает, что знание четырех сторон трапеции полностью задает ее и, следовательно, достаточно для расчета всех ее элементов.

Задача 2. *Построить трапецию по двум основаниям и двум углам при одном из них.*

Решение. Пусть $ABCD$ — искомая трапеция, a и b — ее основания, а α и γ — углы при основании AD (рис. 65).

Продолжим боковые стороны AB и CD до их пересечения в точке E. Очевидно, что получившийся треугольник AED можно построить, поскольку известны его основание AD и два прилежащих к нему угла. Осталось построить отрезок BC, параллельный основанию AD и равный по длине b.

Если на AD отложить отрезок AF, длина которого равна b, и провести прямую FC, параллельную боковой стороне AB, то длина отрезка BC, проведенного через точку C параллельно основанию AD, будет как раз равна b, т.е. трапеция $ABCD$ будет построена полностью.

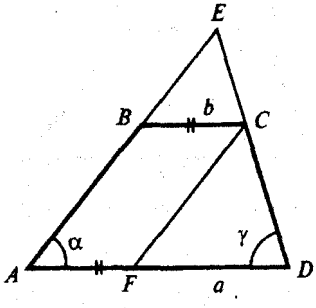


Рис. 65

Таким образом, построение состоит из следующих процедур. Сначала по основанию a и двум прилежащим к нему углам строим треугольник AED. Затем на его основании откладываем отрезок AF, такой, что $AF = b$, и проводим $FC \parallel AB$. Через точку C проводим отрезок BC, параллельный основанию AD треугольника AED. Трапеция $ABCD$ — искомая.

Действительно, как основание, так и прилежащие к нижнему основанию углы по построению равны заданным. Таким образом, задача имеет единственное решение. Решение показывает,

что и в этом случае четыре элемента (хотя и отличные от элементов предыдущей задачи) полностью задают трапецию.

Задача 3. *Построить трапецию по двум основаниям и двум ее диагоналям.*

Решение. Пусть $ABCD$ — искомая трапеция, a и b — ее основания, d_1 и d_2 — диагонали (рис. 66).

Проведем прямую BE, параллельную AC, и рассмотрим получившийся треугольник BDE. В этом треугольнике известны длины всех сторон: $BE = d_1$, $BD = d_2$ и $DE = a + b$, следовательно, такой треугольник можно построить. После этого решение задачи становится очевидным, поскольку достроить треугольник BDE до трапеции $ABCD$ легко: достаточно провести через точку B прямую, параллельную основанию AD, и отложить на ней отрезок BC, равный b.

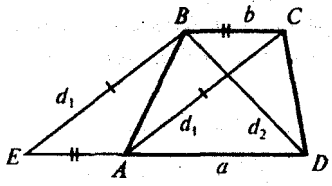


Рис. 66

Доказательство того факта, что трапеция $ABCD$ — искомая, также очевидно. Из построения ясно, что ее диагонали и основания равны заданным величинам. Ясно также и то, что построение возможно тогда, когда по трем отрезкам d_1, d_2 и $(a + b)$ можно построить треугольник.

Как и в предыдущих случаях, решение этой задачи показывает, что произвольная трапеция определяется, вообще говоря, четырьмя независимыми параметрами. В данном случае такими параметрами являются ее основания и диагонали.

Рассмотрим решение нескольких «производных» задач.

Пример 1. *Найти площадь трапеции, если ее основания равны* 5 *и* 2 *см, а боковые стороны* — 3 *и* 1 *см.*

Решение. В условии задачи даны четыре элемента, по которым трапецию можно построить, см. задачу 1 (рис. 64). Используя метод построения, нетрудно предложить и способ решения этой задачи. Найдем сначала площадь треугольника ABE по трем сторонам: $AB = 3$, $BE = 1$ и $AE = 5 - 2 = 3$. Для этого воспользуемся формулой Герона:

$$S_{ABE} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{35}}{4}.$$

Площадь параллелограмма $BCDE$ равна удвоенной площади треугольника ECD. Поскольку треугольники ABE и ECD имеют

одинаковую высоту, а основание DE треугольника ECD равно 2 см, то

$$S_{ECD} = \frac{2}{3} \cdot S_{ABE} = \frac{\sqrt{35}}{6}; \quad S_{BCDE} = \frac{\sqrt{35}}{3}.$$

Следовательно, площадь трапеции $ABCD$ равна:

$$S_{ABCD} = S_{ABE} + S_{BCDE} = \frac{\sqrt{35}}{4} + \frac{\sqrt{35}}{3} = \frac{7\sqrt{35}}{12}.$$

Пример 2. *Длины оснований трапеции равны 4 см и 2 см, а один из углов при большем основании составляет 60°. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Найти радиус этой окружности.*

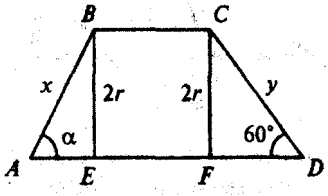


Рис. 67

Решение. В условии этой задачи присутствуют почти все элементы, необходимые для того, чтобы ее можно было построить стандартным способом, см. задачу 2 этого параграфа. Не хватает только величины второго угла при основании. Вместо этого в задаче имеется условие — в трапецию можно вписать окружность — равносильное условию равенства сумм длин противоположных сторон трапеции, т.е. условию:

$$AB + CD = AD + BC = 6 \text{ (рис. 67).}$$

Поэтому для решения задачи зададим угол BAD, обозначив его величину через α; кроме того, длины сторон AB и CD назовем x и y. Тогда получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x \sin\alpha = y \sin 60^\circ, \\ x \cos\alpha + 2 + y \cos 60^\circ = 4, \\ x + y = 6. \end{cases}$$

Первое из этих уравнений получено путем выражения высоты трапеции двумя различными способами из треугольников ABE и CDF; второе — путем проектирования ломаной $ABCD$ на прямую AD, причем вид этого уравнения не зависит от того, острый или тупой угол α; третье — отражает условие, что в трапецию можно вписать окружность.

Из первых двух уравнений находим x и y. Имеем:

$$x = \frac{2\sqrt{3}}{\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha}, \quad y = \frac{4\sin\alpha}{\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha}.$$

Подставляя этот результат в третье уравнение системы, получаем:

$$\frac{2\sin\alpha + \sqrt{3}}{\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha} = 3,$$

$$\sin\alpha + 3\sqrt{3}\cos\alpha = \sqrt{3}.$$

Решив это уравнение, найдем, что $\sin\alpha = 4\sqrt{3}/7$, $\cos\alpha = 1/7$. После этого определяем величину y:

$$y = \frac{4\sin\alpha}{\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha} = \frac{4 \cdot 4\sqrt{3}/7}{4\sqrt{3}/7 + \sqrt{3}/7} = \frac{16}{5},$$

Поскольку $2r = y \cdot \sin 60° = y\sqrt{3}/2$, где r — радиус вписанной в трапецию окружности, то $r = 4\sqrt{3}/5$ см.

Пример 3. *Трапеция $ABCD$ с основаниями $BC = 1$ и $AD = 3$ такова, что в нее можно вписать окружность и вокруг нее можно описать окружность. Определить, где находится центр описанной окружности, т.е. расположен ли он внутри, вне или же на одной из сторон трапеции $ABCD$. Найти также площадь описанного круга.*

Решение. Пусть трапеция $ABCD$ — такая трапеция (рис. 68). Поскольку в трапецию можно вписать окружность, то суммы ее противоположных сторон равны между собой, а поскольку трапецию можно вписать в окружность, то она — равнобочная. Следовательно, $AB = CD = 0{,}5(BC + AD) = 2$ и в ней известны длины всех сторон.

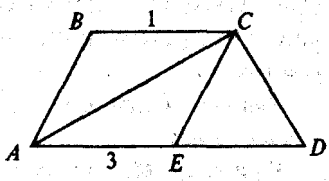


Рис. 68

Для того, чтобы определить, где лежит центр описанной вокруг трапеции окружности, достаточно выяснить — острый или тупой угол ACD. Если он острый, то центр окружности лежит внутри трапеции; если он тупой, то центр окружности лежит вне трапеции.

Углы трапеции легко определяются по ее сторонам (см. задачу 1 этого параграфа). Проводим $CE \parallel AB$, тогда $CE = CD = ED = 2$. Следовательно, угол ADC равен 60°.

Угол ACD можно рассчитать с помощью теоремы косинусов, примененной к треугольнику ACD. Сначала находим диагональ AC. Имеем:

$$AC^2 = CD^2 + AD^2 - 2\ CD \cdot AD \cos 60^\circ = 7;\ AC = \sqrt{7}.$$

Затем вычисляем угол ACD, равный α:

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2\ AC \cdot CD \cos \alpha,$$

$$\cos \alpha = \frac{AC^2 + CD^2 - AD^2}{2AC \cdot CD} = \frac{7+4-9}{2\sqrt{7} \cdot 2} = \frac{\sqrt{7}}{14}.$$

Отсюда, во-первых, видно, что угол α — острый, поскольку $\cos \alpha > 0$; во-вторых, можно найти $\sin \alpha$, который в сочетании с теоремой синусов, примененной к треугольнику ACD, позволяет вычислить радиус описанной вокруг него окружности. Имеем:

$$R = \frac{AD}{2 \cdot \sin \alpha},$$

где $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = 3\sqrt{21}/14$. Получаем: $R = \sqrt{21}/3$.

Площадь описанного круга равна $7\pi/3$, его центр находится внутри трапеции.

Равнобочная трапеция, с которой мы встретились в последней задаче, имеет ось симметрии, проходящую через середины оснований; центр описанной вокруг нее окружности лежит на этой оси, а в том случае, когда в трапецию можно вписать окружность, на этой оси лежит и центр вписанной окружности. Равнобочная трапеция определяется меньшим числом параметров, чем произвольная трапеция; в общем случае таких параметров три.

Задача. *Доказать,что если диагонали трапеции равны, то она — равнобочная.*

Решение. Используем построение, выполненное на рис. 66 и состоящее в том, что через вершину B трапеции $ABCD$ проводится прямая BE, параллельная диагонали AC. Поскольку $BE = BD$, то треугольник EBD — равнобедренный. Следовательно, угол BED равен углу BDE, а также углу CAD.

Аналогично доказывается, что угол BAC равен углу BDC. Для этого нужно только провести через точку D прямую, параллельную диагонали BD.

Таким образом, величина угла BAD равна величине угла CDA и, следовательно, трапеция $ABCD$ — равнобочная.

Пример 4. *В трапеции $ABCD$: $AD = 7$, длины диагоналей равны $\sqrt{37}$, а угол BAD составляет 60°. На диагонали BD расположена точка M так, что $BM : MD = 3 : 5$. Узнать, какую из сторон трапеции — BC или CD — пересечет продолжение отрезка AM?*

Решение. Поскольку длины диагоналей трапеции равны, то она — равнобочная (см. предыдущую задачу). Из треугольника ABD легко найти длины боковых сторон трапеции. Обозначим их через x (рис. 69). По теореме косинусов имеем:

$$BD^2 = x^2 + AD^2 - 2x \cdot AD \cos 60°,$$

или

$$x^2 - 7x + 12 = 0,$$

откуда находим два значения $x : x_1 = 3$ и $x_2 = 4$. Таким образом, при заданных условиях возможны два варианта рассматриваемой фигуры.

Пусть Q — точка пересечения диагоналей трапеции. Легко понять, что если Q лежит на отрезке BM, то продолжение AM пересечет сторону BC; если же Q принадлежит отрезку MD, то продолжение AM пересекает сторону CD трапеции.

Из подобия треугольников BQC и AQD видно, что

$$BQ : QD = BC : AD, \text{ т.е. } BQ : BD = BC : (BC + AD).$$

Рассмотрим случай, когда боковая сторона трапеции равна 3. В этом случае отрезки AE и FD равны $3 \cos 60°$, т.е. 3/2. Тогда верхнее основание трапеции равно 4. Искомое отношение $BQ : BD$ равно 4/11, т.е. меньше, чем 3/8. Значит, в этом случае продолжение AM пересечет боковую сторону CD трапеции.

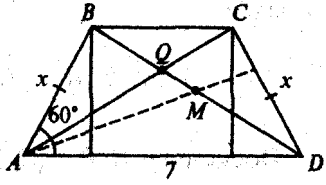


Рис. 69

Во втором случае $AB = CD = 4$. Аналогично находим, что верхнее основание трапеции имеет длину, равную 3. Тогда отношение BQ к QD составляет 3/10, т.е. опять меньше 3/8. И в этом случае продолжение отрезка AM пересекает сторону CD трапеции.

Пример 5. *Дана равнобочная трапеция, в которую вписана окружность и около которой описана окружность. Отношение высоты трапеции к радиусу описанной окружности равно $\sqrt{2} / \sqrt{3}$. Найти углы трапеции.*

Решение. Чертеж к этой задаче дан на рис. 70.

Обозначим угол при большем основании трапеции через α, высоту — H, радиус описанной окружности — R. Будем искать величину R как радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC, с углом B при вершине, равным $(\pi-\alpha)$. По теореме синусов имеем:

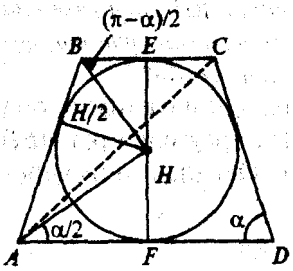


Рис. 70

$$R=\frac{AC}{2\sin(\pi-\alpha)}=\frac{AC}{2\sin\alpha}.$$

Вычислим стороны ΔABC. Учитывая, что центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис углов трапеции (а также и на оси ее симметрии), получаем

$$AB=\frac{H}{\sin\alpha};\quad BE=\frac{H}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2};$$

$$BC=2BE=H\operatorname{tg}\alpha/2.$$

По теореме косинусов находим:

$$AC^2=AB^2+BC^2-2\,AB\cdot BC\cos(\pi-\alpha),$$

$$AC^2=\frac{H^2}{\sin^2\alpha}+H^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+2\frac{H^2}{\sin\alpha}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cos\alpha,$$

и далее:

$$4\sin^2\alpha\cdot R^2=H^2\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\alpha\right)$$

Поскольку $H/R=\sqrt{2/3}$, то $R^2/H^2=3/2$. Имеем:

$$4\sin^2\alpha\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{\sin^2\alpha}+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\alpha,$$

т.е. уравнение для определения острого угла α. Полученное уравнение после упрощений дает:

$$6\sin^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}+1,$$

$$6\sin^4\alpha - \sin^2\alpha - 1 = 0,$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}.$$

Поскольку $\sin\alpha > 0$, то $\sin\alpha = \sqrt{2}/2$ и $\alpha = \pi/4$.

Таким образом, углы трапеции равны 45° и 135°.

Рассмотрим теперь выпуклые четырехугольники, у которых имеется не одна, а две пары параллельных сторон — **параллелограммы**. Напомним, что при этом условии параллельные стороны будут еще иметь и равные длины.

Диагонали параллелограммов в точке их пересечения делятся пополам. Если стороны параллелограмма имеют равные длины, то это — ромб. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны. Если длины диагоналей параллелограмма равны, то это — прямоугольник. Прямоугольник с взаимно перпендикулярными диагоналями — квадрат.

Задача 4. *Доказать, что параллелограмм, в который можно вписать окружность, есть ромб.*

Решение. Поскольку в описанном четырехугольнике суммы длин противоположных сторон равны друг другу, то в случае параллелограмма это условие равносильно равенству длин смежных сторон. Следовательно, такой параллелограмм — ромб.

Задача 5. *Доказать, что параллелограмм, вокруг которого можно описать окружность, есть прямоугольник.*

Решение. Поскольку во вписанном четырехугольнике суммы противоположных углов равны 180°, то в случае параллелограмма, у которого величины таких углов равны между собой, это условие равносильно тому, что каждый угол составляет 90°, и данный параллелограмм — прямоугольник.

Следствие. *Параллелограмм, в который можно вписать окружность и вокруг которого можно описать окружность, является квадратом.*

Произвольный параллелограмм полностью определяется заданием трех параметров, например, длин сторон и угла между ними, или длин его диагоналей и угла между ними, или одной стороны, одной диагонали и угла между сторонами и т.д. Поэтому многие задачи, связанные с расчетом элементов параллелограмма, можно решать как задачи на составление уравнений, аналогично тому, как это делалось в § 3.

Рассмотрим следующий пример.

Пример 6. *В параллелограмме $ABCD$ со стороной $AD = a$ и острым углом $\widehat{BAD} = \alpha$ ($\alpha > \pi/6$) высота, опущенная из вершины B на сторону AD, вдвое меньше диагонали AC. Найти площадь параллелограмма.*

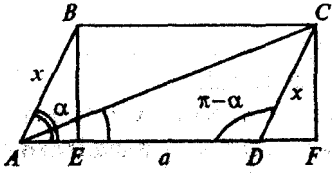


Рис. 71

Решение. В условии задачи содержатся два из трех параметров, «удобно» определяющих параллелограмм, это a и α. Вместо третьего параметра указано соотношение между длинами одной из высот и диагональю параллелограмма.

Введем в качестве третьего параметра длину стороны AB параллелограмма, обозначив ее x, и запишем условие, что $BE = 1/2 \cdot AC$ (рис. 71).

Имеем:

1. $BE = x \cdot \sin\alpha$

2. $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\,AB \cdot BC \cos \cdot \widehat{ABC}$

или

$$AC^2 = x^2 + a^2 - 2a \cdot x \cdot \cos(\pi - \alpha).$$

Далее составляем уравнение:

$$x^2 \sin^2\alpha = \frac{1}{4}(x^2 + a^2 + 2 \cdot a \cdot x \cdot \cos\alpha)$$

или

$$x^2(1 - 4\sin^2\alpha) + 2 \cdot a \cdot x \cdot \cos\alpha + a^2 = 0.$$

Дискриминант $3\sin^2\alpha$ этого уравнения положителен, поэтому уравнение имеет действительные решения. Поскольку $\alpha > \pi/6$, то $\sin\alpha > 1/2$, и первый коэффициент уравнения отрицателен. Так как свободный член уравнения положителен, то по теореме Виетта корни уравнения имеют разные знаки. Берем, естественно, положительный корень уравнения:

$$x = a \cdot \frac{\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha}{4\sin^2\alpha - 1}.$$

Заметив, что

$$\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha = 2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right),$$

$$4\sin^2\alpha - 1 = 4(\sin\alpha - \sin\frac{\pi}{6})(\sin\alpha + \sin\frac{\pi}{6}) = 4\sin(\alpha - \frac{\pi}{6})\sin(\alpha + \frac{\pi}{6}),$$

получим:

$$x = \frac{a}{2\sin(\alpha - \pi/6)}.$$

Площадь параллелограмма:

$$S = \frac{1}{2}ax\sin\alpha = \frac{a^2\sin\alpha}{4\sin(\alpha - \pi/6)}.$$

Конечно, этот же результат можно получить проще. Из прямоугольного треугольника ACF находим, что $\widehat{CAD} = \pi/6$ (отсюда ясно, почему α должно быть больше $\pi/6$). Кроме того, известно, что $\widehat{ADC} = \pi - \alpha$, следовательно, $\widehat{ACD} = \alpha - \pi/6$. По теореме синусов, примененной к треугольнику ACD, имеем:

$$\frac{a}{\sin(\alpha - \pi/6)} = \frac{CD}{\sin\pi/6},$$

откуда находим длину стороны $CD = x$:

$$x = \frac{a}{2\sin(\alpha - \pi/6)}.$$

Пример 7. *В параллелограмме со сторонами a и b и углом α проведены биссектрисы четырех углов. Найти площадь четырехугольника, ограниченного биссектрисами.*

Решение. Покажем сначала, что четырехугольник, ограниченный биссектрисами внутренних углов параллелограмма, — прямоугольник.

Действительно, биссектрисы противолежащих углов параллелограмма попарно параллельны, следовательно, ограниченный ими четырехугольник $KLMN$ (рис. 72), будет параллелограммом.

Кроме того, все углы этого параллелограмма — прямые. Треугольники ALD, BNC, CMD и AKB — прямоугольные. Например, в треугольнике ALD: $\widehat{LAD} = 1/2 \cdot \widehat{BAD} = \alpha/2$; $\widehat{LDA} = 1/2 \cdot \widehat{ADC} = (\pi - \alpha)/2$, следовательно, $\widehat{ALD} = \pi - \alpha/2 - (\pi/2 - \alpha/2) = \pi/2$. Таким образом, $KLMN$ — прямоугольник.

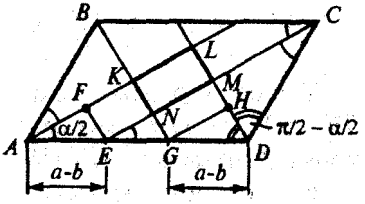


Рис. 72

Стороны прямоугольника находим следующим образом. Пусть $a > b$. Заметив, что ΔCDE — равнобедренный ($\widehat{BCE} = \widehat{DCE}$ — по условию, так как CE — биссектриса; $\widehat{DEC} = \widehat{BCE}$ — как накрест лежащие; следовательно, $\widehat{DCE} = \widehat{DEC}$), получим: $AE = a - b$. Тогда из прямоугольного треугольника AEF находим, что $EF = KN = (a - b)\sin\alpha/2$. Аналогично находим, что $GD = a - b$ и $GH = MN = (a - b)\sin(\pi/2 - \alpha/2) = (a - b)\cos\alpha/2$.

Площадь S прямоугольника $KLMN$ вычисляем по формуле:

$$S = KN \cdot MN = (a - b)^2 \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(a - b)^2 \sin\alpha.$$

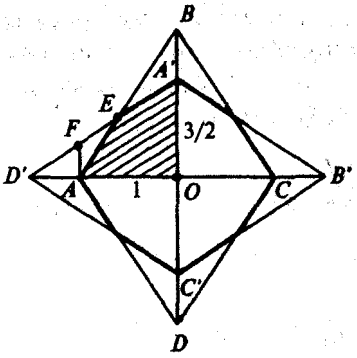


Рис. 73

Пример 8. *Вычислить площадь общей части двух ромбов: диагонали первого равны 2 и 3, а второй получается поворотом первого на 90° около его центра.*

Решение. Чертеж к этой задаче представлен на рис. 73. Очевидно, что площадь общей части двух ромбов складывается из четырех площадей фигуры $AEA'O$. В свою очередь площадь четырехугольника $AEA'O$ — есть часть площади прямоугольного треугольника ABO так, что

$$S_{AEA'O} = S_{ABO} - A_{EBA'}.$$

Площадь треугольника EBA' легко найти, заметив, что этот треугольник получается из треугольника ABO уменьшением двух из его сторон в $OB/A'B$ и AB/EB раз. Поэтому (см. § 1 и 4):

$$S_{EBA'} = \frac{A'B}{OB} \cdot \frac{EB}{AB} \cdot S_{ABO} = \frac{1/2}{1/3} \cdot \frac{EB}{AB} \cdot S_{ABO}.$$

Следовательно,

$$S_{EBA'} = \frac{3}{2} \cdot \frac{EB}{AB} \cdot S_{ABO}; \quad S_{AEA'O} = S_{ABO} \cdot \left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{EB}{AB}\right).$$

Таким образом, задача сводится к отысканию отношения $EB : AB$. Для этого воспользуемся методом, изложенным в § 4. Через точку A проведем $AF \parallel OB$.

Из подобия треугольников AFD' и $OA'D'$ с коэффициентом подобия $1 : 3$ следует, что $AF = 1/3 \cdot OA' = 1/3$.

Из подобия треугольников AFE и $A'BE$ с коэффициентом подобия $AF : A'B = 1/3 : 1/2 = 2 : 3$ следует, что $EB = 3/2 \cdot EA$ или $EB = 3/5 \cdot AB$. Следовательно, $EB : AB = 3 : 5$.

Имеем:

$$S_{AEA'O} = S_{AOB} \cdot \left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{5}\right) = \frac{3}{4}\left(1 - \frac{9}{10}\right) = \frac{3}{40}.$$

Поэтому площадь общей части двух ромбов равна 3/10.

В заключение этого параграфа рассмотрим несколько задач, в которых речь идет о произвольных четырехугольниках или многоугольниках.

Пример 9. *Площадь четырехугольника, вершинами которого служат середины сторон выпуклого четырехугольника ABCD, равна S. Найти площадь четырехугольника ABCD.*

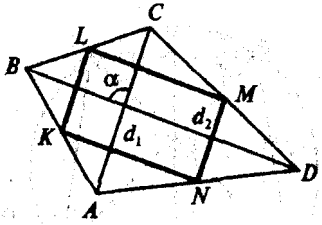


Рис. 74

Решение. Четырехугольник $KLMN$ (рис. 74), вершинами которого являются середины сторон произвольного выпуклого четырехугольника — параллелограмм (см. § 1), поскольку его стороны попарно параллельны диагоналям четырехугольника $ABCD$. Длины сторон этого параллелограмма равны $d_1/2$ и $d_2/2$, как длины средних линий соответствующих треугольников, а угол между ними равен углу между диагоналями четырехугольника. Поэтому

$$S = S_{KLMN} = \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} \sin\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha\right),$$

где α — угол между диагоналями четырехугольника $ABCD$.

Поскольку площадь произвольного четырехугольника равна полупроизведению диагоналей на синус угла между ними, то

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha$$

и

$$S_{ABCD} = 2S.$$

Пример 10. *Четырехугольник ABCD обладает тем свойством, что около него можно описать и в него можно вписать окружности. Диагонали этого четырехугольника перпендикулярны, AB = CD и радиус вписанной окружности равен 1. Чему равна площадь четырехугольника ABCD?*

Решение. Поскольку в окружности, описанной вокруг четырехугольника $ABCD$, хорды AB и CD имеют равные длины, то равны длины стягиваемых ими дуг. Отсюда следует равенство углов DAC, DBC, ACB и ADB, опирающихся на эти дуги. Если к тому учесть, что треугольники BCE и ADE — прямоугольные, можно заключить, что упомянутые углы составляют по 45° (рис. 75).

Таким образом, установлено, что четырехугольник $ABCD$ — равнобочная трапеция. Обозначим длины оснований $BC = u$, $AD = v$, а боковых сторон — x. Тогда очевидны соотношения:

1) $u + v = 2x$;

2) $(u/\sqrt{2})^2 + (v/\sqrt{2})^2 = x^2$;

3) $u/2 + v/2 = 2$.

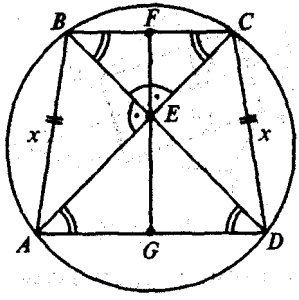


Рис. 75

Первое из них следует из условия, что в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность, второе — из теоремы Пифагора, примененной к треугольнику ABE, третье отражает тот факт, что $EF = u/2$, $EG = v/2$, а весь отрезок FG является диаметром вписанной окружности.

Разрешая эти соотношения, получаем: $u = v = x = 2$, т.е. устанавливаем, что четырехугольник $ABCD$ — квадрат. Следовательно, его площадь равна 4.

Пример 11. *Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Расстояния от вершины E до сторон AB, BC и CD (или их продолжений) соответственно равны a, b и c. Найти расстояние от вершины E до диагонали AD.*

Решение. В § 1 была сформулирована в виде задачи следующая теорема: «произведение расстояний от любой точки окружности, описанной около выпуклого четырехугольника, до его противоположных сторон или их продолжений, равны между собой» (см. задачу 10 § 1) (рис. 38). Поэтому, приняв за точку S вершину E пятиугольника, можно записать уравнение

$$ac = bx,$$

в котором x — расстояние от вершины E до диагонали AD пятиугольника. Отсюда легко следует, что $x = ac/b$.

ЗАДАЧИ

1. В равнобочную трапецию, верхнее основание которой равно 1, вписана окружность радиуса 1. Найти площадь трапеции.

Ответ: 5.

2. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 8$, $BC = 4$ и стороной $AB = \sqrt{28}$. Кроме того, известно, что угол CDA составляет 60°. Через точку C проходит прямая, делящая трапецию на две равновеликие фигуры. Найти длину всего отрезка этой прямой, находящегося внутри трапеции.

Ответ: 6.

3. В трапеции $ABCD$ длина большего основания AD равна 19, $AB = 13$, а другая боковая сторона $CD = 12$ и перпендикулярна основаниям. Биссектриса острого угла BAD пересекает прямую DC в точке M. Определить, где лежит точка M, на отрезке DC или вне его?

Ответ: Точка M лежит вне отрезка DC; $DC : MD = 38 : 3$.

4. Основание AB трапеции $ABCD$ вдвое длиннее основания CD и вдвое длиннее боковой стороны AD. Длина диагонали AC равна a, а длина боковой стороны BC равна b. Вычислить площадь трапеции.

Ответ: $3ab/4$.

5. Дана равнобочная трапеция, в которую вписана окружность и около которой описана окружность. Площадь описанного круга в 12 раз больше площади вписанного круга. Найти углы трапеции.

Ответ: $\arcsin(1/3)$; $\pi - \arcsin(1/3)$.

6. Дан параллелограмм $ABCD$, у которого $AB = 1$, $BC = 2$ и угол ABC — тупой. Через каждую из точек B и D проведено по две прямые, одна из которых перпендикулярна стороне AB, а другая перпендикулярна стороне BC. В пересечении этих четырех прямых получился параллелограмм, подобный параллелограмму $ABCD$. Найти площадь параллелограмма $ABCD$.

Ответ: 6/5.

7. A, B, C и D — последовательные вершины прямоугольника. Окружность проходит через точки A и B и касается стороны CD в ее середине. Через точку D проведена прямая, которая касается

той же окружности в точке E, а затем пересекает продолжение стороны AB в точке K. Найти площадь трапеции $BCDK$, если известно, что $AB = 10$ и что $KE : KA = 3 : 2$.

Ответ: 210.

8. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы при вершинах A и B — прямые, величина угла при вершине D равна 45°. Длина стороны BC равна 1 м, длина диагонали BD равна 5 м. Найти площадь этого четырехугольника.

Ответ: 7,5 м^2.

9. В выпуклом четырехугольнике длины диагоналей равны 1 и 2 м. Найти площадь четырехугольника, зная, что длины отрезков, соединяющих середины его противоположных сторон, равны.

Ответ: 1 м^2.

10. В трапеции длины диагоналей равны 3 и 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 2. Найти площадь трапеции.

Ответ: 6.

§ 7. ЗАДАЧИ НА ОТЫСКАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР С ЭКСТРЕМАЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Обратимся теперь к особому классу геометрических задач, а именно к задачам, в которых требуется найти фигуру или ее элементы с экстремальными, т.е. наибольшими или наименьшими значениями тех или иных параметров. В задачах этого класса, как правило, речь идет о том, чтобы среди всех фигур, обладающих определенным свойством, найти фигуру, у которой тот или иной параметр принимает наибольшее или наименьшее значение.

Рассмотрим простейший пример.

Задача 1. *Среди всех прямоугольников, периметр которых равен $2p$, найти прямоугольник с наибольшей площадью.*

Решение. Произвольный прямоугольник определяется двумя параметрами: x и y — длинами его сторон. Однако в данном случае эти параметры не являются независимыми, поскольку между ними существует связь, выражаемая уравнением

$$2x + 2y = 2p$$

и вытекающая из условия, что у всех рассматриваемых прямоугольников один и тот же периметр. Поэтому площадь S такого прямоугольника $S = xy = x(p - x)$, является функцией только одной переменной — x, причем $0 < x < p$.

Таким образом, задача сводится к отысканию максимума квадратичной функции $S(x) = x(p - x)$ в интервале $x \in [0; p]$. Поскольку парабола $x(p - x)$ направлена ветвями вниз, то, очевидно, что ее максимум достигается в вершине, т.е. при $x = p/2$. Поэтому в прямоугольнике с наибольшей площадью одна из сторон равна $p/2$. Отсюда сразу же следует, что $y = x = p/2$, т.е. прямоугольник — квадрат.

Итак, среди всех прямоугольников с заданным периметром наибольшей площадью обладает квадрат.

Практической интерпретацией полученного результата служит вывод о том, что максимальная площадь прямоугольного участка, который можно огородить забором заданной длины, у квадрата.

Задача 2. *Среди всех прямоугольников, вписанных в треугольник ABC таким образом, что две вершины прямоугольника лежат на основании AC,а две другие— на боковых сторонах AB и BC,соответственно, найти прямоугольник: 1) с наибольшей площадью; 2) с наименьшей диагональю.*

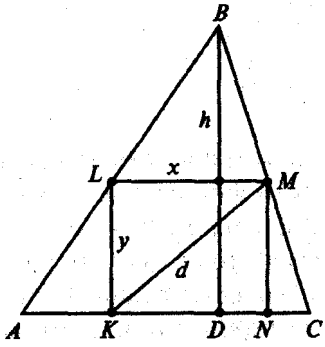


Рис. 76

Решение. Обозначим длину основания AC треугольника через a, а высоты BD — через h (рис. 76). Пусть $KLMN$ — вписанный прямоугольник со сторонами, длины которых равны $LM = x$, $KL = y$.

1. Найдем сначала среди прямоугольников тот, у которого наибольшая площадь.

Как и в предыдущей задаче, площадь выражается формулой $S = xy$, причем между величинами x и y существует связь. Действительно, из подобия треугольников LBM и ABC следует пропорция

$$\frac{LM}{AC} = \frac{BE}{BD} \quad \text{или} \quad \frac{x}{a} = \frac{h-y}{h},$$

откуда вытекает, что $x = (h - y) \cdot a/h$. Это позволяет заключить, что площадь любого вписанного прямоугольника равна:

$$S = xy = \frac{a}{h} y(h-y)$$

Площадь является функцией только одной переменной y.

Поскольку парабола $S(y) = y(h - y)a/h$ направлена ветвями вниз, то в интервале $]0; h[$ она имеет максимум, причем этот максимум достигается в точке $y = h/2$. Отсюда легко следует, что $x = a/2$.

Таким образом, среди всех вписанных прямоугольников будет обладать наибольшей площадью тот, у которого одна из сторон является средней линией треугольника. При этом $x/y = a/h$.

2. Найдем теперь прямоугольник с наименьшей диагональю. Обозначим ее длину d. Тогда:

$$d^2 = x^2 + y^2 = y^2 + [\frac{a}{h}(h - y,)]^2,$$

или

$$d^2 = y^2[1 + \left(\frac{a}{h}\right)^2] - 2hy\left(\frac{a}{h}\right)^2 + a^2 = f(y),$$

т.е. длина диагонали прямоугольников является также функцией только одной переменной.

Нетрудно видеть, что для параболы $f(y)$, направленной ветвями вверх, минимум достигается при $y = y_*$, где y_* — координата вершины этой параболы:

$$y_* = h\frac{(a/h)^2}{1 + (a/h)^2}.$$

Этому значению y_* соответствует x_*, равное $a/[1 + (a/h)^2]$; $x_*/y_* = h/a$, т.е. отношение сторон прямоугольника, у которого длина диагонали будет наименьшей из всех возможных, равно h/a. Заметим, что отношение сторон полученного прямоугольника обратно по отношению к прямоугольнику с наибольшей площадью, вписанному в этот же треугольник.

Задача 3. *На окружности дана точка M. Провести хорду AB параллельно касательной к окружности в точке M так, чтобы площадь треугольника AMB была наибольшей.*

Решение. Пусть O — центр данной окружности, R — ее радиус, AB — произвольная хорда, параллельная касательной к окружности, проведенной в точке M, C — середина этой хорды (рис. 77).

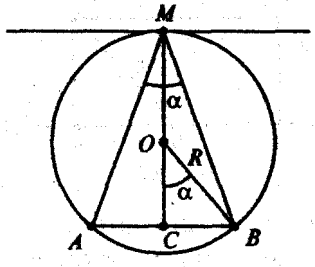


Рис. 76

Прежде всего заметим, что положение хорды AB определяется всего лишь одним независимым параметром — расстоянием этой хорды от точки M или, например, углом $\widehat{AMB}$, под которым эта хорда видна из точки M. Поэтому площадь треугольника AMB также должна зависеть от этого параметра. Выберем в качестве такого параметра величину угла $\widehat{AMB}$, назвав ее α.

Имеем:

1. $CB = R\sin\alpha$, $AB = 2R\sin\alpha$.

2. $OC = R\cos\alpha$, (если $\alpha > \pi/2$, то C лежит выше O).

3. $MC = R + R\cos\alpha = R(1 + \cos\alpha)$.

Таким образом,

$$S(\alpha) = \frac{1}{2} AB \cdot MC = R^2 \sin\alpha(1 + \cos\alpha) = R^2(\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha).$$

Найдем теперь, при каком значении α функция $S(\alpha)$ принимает свое наибольшее значение ($\alpha \in [0; \pi]$). Для этого вычислим производную $S'(\alpha)$, приравняем ее к нулю и найдем соответствующие α:

$$S'(\alpha) = R^2(\cos\alpha + \cos 2\alpha) = R^2(2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1),$$

$$S'(\alpha) = 2R^2(\cos\alpha + 1)(\cos\alpha - 1/2) = 0,$$

$$\cos\alpha = -1;\ \cos\alpha = 1/2.$$

С учетом интервала, в котором меняется α, находим, что $\alpha = \pi/3$. Очевидно, что в точке $\alpha = \pi/3$ производная $S'(\alpha)$ меняет знак с «+» на «–», что свидетельствует о максимуме функции $S(\alpha)$ в этой точке.

Таким образом, среди треугольников, вписанных в окружность и имеющих основания, параллельные одной и той же прямой, наибольшей площадью обладает равносторонний треугольник.

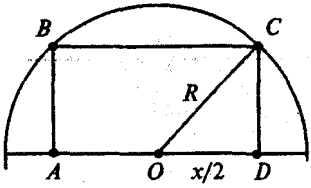


Рис. 78

Задача 4. *Найти стороны прямоугольника наибольшего периметра, вписанного в полуокружность радиуса R.*

Решение. Аналогично тому, как это делалось в предыдущих задачах, выразим интересующий нас элемент, в данном случае периметр вписанного в полуокружность прямоугольника (рис. 78), через один параметр.

Этим параметром может быть одна из сторон прямоугольника, например, $AD = x$. Тогда длина другой стороны CD равна $\sqrt{R^2 - x^2/4}$, а периметр P выражается формулой:

$$P = 2x + 2\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}} = 2x + \sqrt{4R^2 - x^2}.$$

Таким образом, периметр P является функцией только одной переменной x. Найдем максимум функции $P(x)$. Вычислим производную $P'(x)$:

$$P'(x) = 2 + \frac{-2x}{2\sqrt{4R^2 - x^2}} = \frac{2\sqrt{4R^2 - x^2} - x}{\sqrt{4R^2 - x^2}}.$$

Приравнивая $P'(x)$ нулю, находим необходимое условие экстремума

$$2\sqrt{4R^2 - x^2} = x, \text{ откуда } x = 4R/\sqrt{5}.$$

Нетрудно увидеть, что при $x < 4R/\sqrt{5}$ производная P' положительна, а при $x > 4R/\sqrt{5}$, производная P' отрицательна. Следовательно, в точке $x = 4R/\sqrt{5}$ функция $P(x)$ имеет наибольшее значение. Другая сторона CD равна $R/\sqrt{5}$.

Таким образом, среди всех прямоугольников, вписанных в полуокружность, максимальный периметр имеет тот прямоугольник, у которого стороны равны $4R/\sqrt{5}$ и $R/\sqrt{5}$.

Теперь можно сформулировать последовательность действий, которой мы придерживались при решении всех рассмотренных выше задач. Сначала определялись независимые параметры, через которые можно было бы выразить интересующий нас элемент произвольной фигуры, принадлежащей к данной совокупности. Затем величина этого элемента записывалась как функция выбранного параметра (переменной). Наконец, с помощью того или иного приема (например, с использованием производной) отыскивался экстремум этой функции и значение экстремального элемента.

Однако имеются задачи, которые допускают чисто геометрическое решение при нахождении фигур с экстремальными свойствами или использующие алгебраические методы частично. Более того, решение этих задач алгебраическим методом было бы связано с громоздкими математическими выкладками и трудностями при истолковании полученных результатов, в то время как геометрическое решение дает ясный и простой ответ. Рассмотрим примеры таких задач.

Задача 5. *Две точки A и B расположены по одну сторону от прямой MN. Найти на прямой MN такую точку Q, чтобы сумма ее расстояний от точек A и B была минимальной.*

Решение. Пусть Q — произвольная точка, лежащая на прямой MN (рис. 79). Решение задачи легко находится, если заметить, что расстояние от точки Q до точки B равно расстоянию от этой же точки до точки B' симметричной точке B относительно пря-

мой MN и лежащей, следовательно, с точкой A по разные стороны прямой MN.

Таким образом, задачу можно переформулировать как задачу о минимуме суммы расстояний QA и QB', которая, очевидно, будет минимальной, если точка Q лежит на прямой AB', являющейся, как известно, кратчайшим расстоянием между точками A и B'.

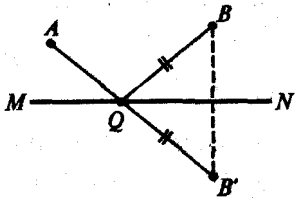


Рис. 79

Задача 6. *Внутри угла A дана точка M. Через точку M провести прямую, отсекающую от этого угла треугольник наименьшей площади.*

Решение. Пусть такая прямая проведена, а точки B и C — точки ее пересечения со сторонами данного угла. Покажем, что если площадь треугольника ABC — наименьшая из всех возможных, то длины отрезков MB и MC равны (рис. 80).

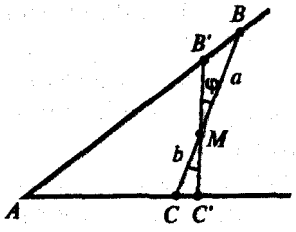
Обозначим $MB = a$, $MC = b$ и предположим противное, что $a \neq b$, например, $a > b$. Проведем через точку M еще одну прямую, пересекающуюся со сторонами угла в точках B' и C', и так, чтобы $AB' < AB$. Подсчитаем, насколько при этом изменится площадь отсекаемого треугольника:

$$S_{AB'C'} = S_{ABC} - S_{MB'B} + S_{MC'C},$$

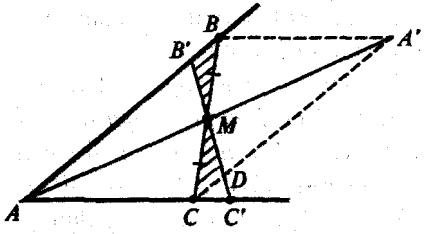
т.е. изменение площади этого треугольника происходит за счет уменьшения при отбрасывании площади $\Delta MB'B$ с одновременным увеличением за счет присоединения площади $\Delta MC'C$. Имеем:

$$S_{MB'B} = \frac{1}{2} a \cdot MB' \cdot \sin\varphi, \quad S_{MC'C} = \frac{1}{2} b \cdot MC' \cdot \sin\varphi,$$

где φ — угол между прямыми BC и $B'C'$ (рис. 80*а*).



а



б

Рис. 80

Поскольку $a > b$, то вследствие непрерывности изменения длин отрезков MB и MC при повороте прямой BC вокруг точки M, угол φ можно выбрать столь малым, что $MB' > MC'$. Отсюда следует, что прямую $(B'C')$ можно провести так, что площадь $\Delta MB'B$ будет больше площади $\Delta MC'C$, т.е. площадь треугольника $\Delta AB'C'$ будет меньше площади треугольника ΔABC. Это противоречит условию, согласно которому площадь ΔABC выбрана наименьшей из всех возможных. Следовательно, a не больше b. Аналогично b не может быть больше a. Следовательно, $a = b$. Это означает, что данная точка M должна быть серединой секущего отрезка BC.

Нетрудно показать, что если искомая прямая BC проведена через точку M так, что $MB = MC$, то ΔABC будет иметь наименьшую площадь. Действительно, проведем любую прямую $B'C'$, например, как это сделано на рис. 80*б*, и $CD \parallel AB$. Фигура $B'BCD$ — параллелограмм, поскольку отрезки BC и $B'D$, являющиеся его диагоналями, делятся в точке пересечения пополам. Отсюда следует, что площади треугольников MBB' и MCC' равны. Следовательно, $S_{MCC'} > S_{MBB'}$ и, значит, площадь треугольника $AB'C'$ больше площади треугольника ABC.

Построение прямой BC осуществляется следующим образом. На продолжении отрезка AM за точку M откладываем точку A' так, чтобы $AM = MA'$. Затем через точку A' проводим прямые $A'B$ и $A'C$, параллельные соответствующим сторонам угла A. Вершины B и C получившегося параллелограмма $ABA'C$ определяют положение искомой прямой.

Рассмотрим, наконец, пример задачи, в которой алгебраический метод используется лишь частично.

Задача 7. *Среди всех треугольников, имеющих при вершине угол* β *и длину основания, равную* b, *найти треугольник, у которого сумма квадратов боковых сторон наибольшая.*

Решение. Известно (см. § 1), что вершины всех треугольников, имеющих одинаковое основание и равные по величине углы при вершине, лежат на одной из дуг окружности, опирающейся на данный отрезок (рис. 7). Этим определяется совокупность рассматриваемых треугольников.

По теореме косинусов, примененной к треугольнику AMC, имеем

$$AC^2 = AM^2 + CM^2 - 2 \cdot AM \cdot CM \cos\beta,$$

откуда находим интересующую нас сумму квадратов боковых сторон:

$$AM^2 + CM^2 = AC^2 + 2 \cdot AM \cdot CM \cos\beta = b^2 + 2 \cdot AM \cdot CM \cos\beta.$$

Поскольку площадь S треугольника AMC равна $1/2 \cdot AM \cdot CM \sin\beta$, то сумму квадратов боковых сторон можно выразить через площадь S треугольника:

$$AM^2 + CM^2 = b^2 + 4S \operatorname{ctg} \beta.$$

Таким образом, сумма квадратов боковых сторон оказалась функцией только одной переменной — площади треугольника S, причем функцией монотонно возрастающей.

Очевидно, что среди всех треугольников, имеющих одно и то же основание и разную высоту, наибольшей будет площадь того треугольника, у которого наибольшая высота. Следовательно, ΔAMC - равнобедренный.

ЗАДАЧИ

1. Среди всех прямоугольников с заданной площадью S найти прямоугольник с наименьшим периметром.

Ответ: Квадрат со стороной $\sqrt{S}$.

2. В данный сегмент круга вписать прямоугольник наибольшей площади.

Ответ: Высота прямоугольника равна

$$(\sqrt{8R^2 + h^2} - 3h)/4,$$

где h — расстояние хорды, стягивающей дугу сегмента, от центра, R — радиус круга.

3. Каков должен быть угол при вершине равнобедренного треугольника заданной площади, чтобы радиус вписанного в этот треугольник круга был наибольшим?

Ответ: 60°.

4. Из круга вырезан сектор с центральным углом α. Из сектора свернута коническая поверхность. При каком значении угла α объем полученного конуса будет наибольшим?

Ответ: $2\pi\sqrt{2/3}$.

5. Даны две параллельные прямые и точка M между ними, лежащая на расстоянии a от одной прямой и на расстоянии b от другой. Точка M служит вершиной прямых углов прямоугольных треугольников, две другие вершины которых P и Q лежат на

каждой из параллельных прямых. Какой из треугольников имеет наименьшую площадь? Найти эту площадь.

Ответ: ab.

6. На стороне угла даны две точки A и B. Найти точку M, лежащую на другой стороне угла и такую, что угол $\widehat{AMB}$ наибольший из всех возможных.

Ответ: Точка M расположена так, что окружность, проходящая через точки A, B и M, касается стороны угла.

7. Найти внутри треугольника точку, сумма квадратов расстояний от которой до вершин треугольника была бы минимальной.

Ответ: Искомой точкой является точка пересечения медиан треугольника.

8. Найти длины сторон равнобедренного треугольника, площадь которого равна S, а сумма квадратов боковых сторон минимальна.

Ответ: $\sqrt{4S}$, $\sqrt{2S}$, $\sqrt{2S}$.

9. В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD перпендикулярна основаниям. Кроме того, длина основания AD равна 1 см, а площадь трапеции — $3\sqrt{6}/2$ см^2. Какими должны быть стороны трапеции, чтобы диагональ BD имела наименьшую длину?

Ответ: Основания — 1 и 2 см, боковые стороны — $\sqrt{6}$ и $\sqrt{7}$ см.

10. По данному основанию и высоте построить треугольник, имеющий минимальный периметр.

Ответ: равнобедренный треугольник.

§ 8. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК И МЕТОД КООРДИНАТ

В дальнейшем пойдет речь о **«геометрическом месте точек»** т.е. множестве точек плоскости, каждая из которых обладает одним и тем же определенным свойством, причем множестве, содержащем **все** точки, обладающие этим свойством.

Например, геометрическим местом точек, равноудаленных от двух заданных точек A и B, является срединный перпендикуляр к отрезку AB. Такой вывод можно сделать по двум причинам: во-первых, любая точка этого перпендикуляра равноудалена от точек A и B, во-вторых, любая точка, не принадлежащая срединному перпендикуляру, будет ближе к одной из точек A или B в зависимости от того, по какую сторону от срединного перпендикуляра эта точка лежит. Следовательно, этот перпендикуляр содержит **все** точки, равноудаленные от точек A и B, т.е. действительно является геометрическим местом точек.

Приведем несколько примеров геометрических мест точек.

Геометрическим местом точек, удаленных от данной точки O на расстояние R, является окружность с центром в точке O и радиусом R.

Геометрическим местом точек, равноудаленных от сторон угла, является биссектриса этого угла.

Геометрическим местом точек, из которых данный отрезок виден под данным углом β, служат дуги двух одинаковых окружностей, в которых данный отрезок является хордой, видной из центров окружностей под углом 2β (рис. 7).

Геометрическим местом середин отрезков, проведенных параллельно основанию треугольника и ограниченных его боковыми сторонами, служит медиана треугольника, проведенная к основанию.

Геометрическим местом середин отрезков, имеющих начало на одной из параллельных прямых, а конец — на другой прямой, служит прямая, параллельная первым двум и находящаяся от них на равном расстоянии.

Рассмотрим несколько задач на нахождение геометрических мест точек.

Задача 1. *На плоскости найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из заданной точки A на произвольные прямые, проходящие через данную точку B.*

Решение. Пусть точка M — основание одного из таких перпендикуляров (рис. 81). Тогда угол AMB — прямой. Аналогично прямым будет и любой другой угол AMB, получающийся при проектировании точки A на прямые, проходящие через точку B.

С другой стороны, известно, что геометрическим местом точек M, из которых заданный отрезок AB виден под прямым углом, является окружность, проходящая через точки A и B и имеющая отрезок AB своим диаметром. Таким образом, искомым геометрическим местом точек является окружность с диаметром AB.

Задача 2. *Найти геометрическое место точек плоскости, симметричных данной точке A относительно произвольной прямой, проходящей через данную точку B.*

Решение. Очевидно, что сама точка A принадлежит искомому геометрическому месту. Действительно, если прямая, проходящая через точку B, выбрана так, что она проходит и через точку A, то симметричная точке A относительно этой прямой точка A' совпадает с точкой A (рис. 82).

Пусть точка M — точка, симметричная точке A относительно произвольной прямой, проходящей через точку B. Тогда очевидно, что $BA = BM$. Это означает, что точка M лежит на окружности с центром в точке B и радиусом BA. Таким образом, необходимым условием, чтобы точка M принадлежала искомому геометрическому месту точек, является условие принадлежности ее указанной окружности.

Покажем теперь, что любая точка окружности с центром в точке B и радиусом BA принадлежит искомому геометрическому месту.

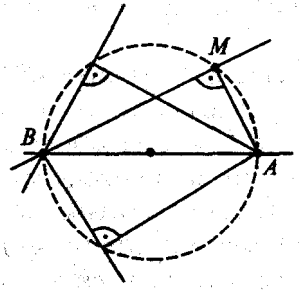


Рис. 81

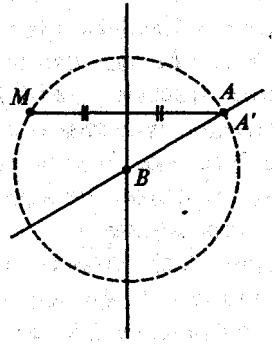


Рис. 82

Пусть M — произвольная точка такой окружности. Проведем к хорде MA срединный перпендикуляр, который, очевидно, проходит через центр окружности, точку B. Тогда точки M и A оказываются симметричными относительно этой прямой, что и доказывает высказанное утверждение.

Таким образом, геометрическим местом точек плоскости, симметричных данной точке A относительно произвольной прямой, проходящей через другую данную точку B, является окружность с центром в точке B и радиусом BA.

Задача 3. *На плоскости даны два отрезка AB и CD. Найти геометрическое место середин отрезков, у которых один конец лежит на отрезке AB, а другой — на отрезке CD.*

Решение. Рассмотрим подмножество отрезков, соединяющих точки отрезков AB и CD, такое, что один конец этих отрезков находится в точке A, а другой — в любой точке отрезка CD (рис. 83).

Это множество принадлежит пучку лучей, исходящих из точки A, и ограниченно отрезками AC и AD. Очевидно, что середины этих отрезков образуют отрезок KL, являющийся средней линией ΔACD, параллельный CD и равный по длине $1/2 \cdot CD$.

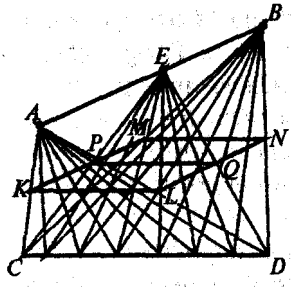


Рис. 83

Аналогично, отрезок MN служит множеством середин отрезков, начинающихся в точке B отрезка AB и оканчивающихся в точках отрезка CD, причем $MN \parallel CD$ и $MN = 1/2 \cdot CD$.

Пусть E — произвольная точка отрезка AB. Рассмотрим середины отрезков, исходящих из точки E и оканчивающихся в точках отрезка CD. Они образуют отрезок PQ, являющийся средней линией ΔECD, параллельный CD и равный по длине, как и предыдущие отрезки, $1/2 \cdot CD$.

Покажем, что точки P и Q принадлежат отрезкам KM и LN соответственно. Действительно, точка P является серединой одного из отрезков, исходящих из точки C и оканчивающихся в точках отрезка AB. Следовательно, эта точка принадлежит средней линии KM треугольника CAB, которая параллельна AB и равна по длине $1/2 \cdot AB$. Аналогично показывается, что точка Q принадлежит отрезку LN, который также параллелен AB и равен по длине $1/2 \cdot AB$.

Таким образом, фигура $KLMN$ — параллелограмм со сторонами, параллельными отрезкам AB и CD и длинами сторон, равными половинам длин этих отрезков. Геометрическим местом середин отрезков, начинающихся в точках отрезка AB и оканчивающихся в точках отрезка CD, является множество точек, лежащих внутри или на границе этого параллелограмма.

Заметим, что метод решения этой задачи показывает, что ни одна из точек, лежащая вне параллелограмма $KLMN$, не может быть серединой какого-либо из рассматриваемых отрезков.

Метод координат

Во многих случаях для отыскания геометрических мест точек удобно использовать метод координат. Напомним основные положения этого метода.

Прямоугольными декартовыми координатами точки на плоскости называются координаты проекций этой точки на оси координат. Между точками M плоскости и парами чисел (x, y) существует взаимно однозначное соответствие, т.е. соответствие, при котором каждой точке соответствует одна пара чисел и каждой паре чисел соответствует некоторая точка плоскости, причем разным точкам соответствуют разные пары. Записывают это так: $M(x, y)$.

Если числа x и y произвольно меняются от 0 до ∞, то соответствующая точка M может лежать в любом месте плоскости. Если же точки таковы, что между их координатами существует определенное соотношение, то они лежат не произвольно, а образуют на плоскости некоторое множество. Например, совокупность точек $M(x, y)$, у которых $x > 0$ и $y > 0$, образуют «первый квадрант», или «первую четверть» плоскости; точки, у которых $x < 0$, $y > 0$, лежат во «втором квадранте»; совокупность точек, координаты которых связаны неравенством $x^2 + y^2 \le R^2$, представляет собой круг с радиусом R и центром в начале координат; совокупность точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $x = y$, является биссектрисой первого и третьего квадрантов и т.д.

Квадрат расстояния d между двумя точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ выражается через координаты этих точек формулой:

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Середина отрезка AB имеет при этом координаты $1/2 \cdot (x_1 + x_2)$; $1/2 \cdot (y_1 + y_2)$.

Отыскание геометрических мест с помощью метода координат удобно, потому что каждое свойство, которое выделяет геометри-

ческое место точек, алгебраически выражается одним или несколькими соотношениями между координатами точек, принадлежащих этому геометрическому месту. С другой стороны, всякое соотношение (или система соотношений) между координатами x и y точек плоскости определяют множество, которое можно рассматривать как геометрическое место точек, обладающих свойством, выражаемым этим соотношением.

Для иллюстрации сказанного рассмотрим несколько задач.

Задача 4. *Каким соотношением между координатами точек, образующих окружность с центром в точке O и радиусом R, записывается это геометрическое место?*

Решение. Введем систему координат так, что точка O получит координаты (x_0, y_0). Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка окружности. Тогда расстояние OM равно R. Имеем:

$$d^2 = OM^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2.$$

Поскольку в рассматриваемом случае $d = R$ при любых x и y, то координаты точек окружности должны удовлетворять соотношению

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

которое и представляет собой координатную запись данного геометрического места точек. Это соотношение называется **«уравнением окружности»** с центром в точке $O(x_0, y_0)$ и радиусом R.

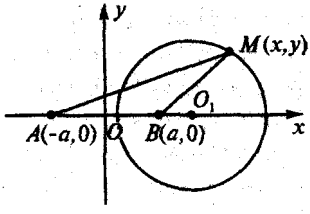


Рис. 84

Задача 5. *На плоскости даны две точки A и B. Найти геометрическое место точек, расстояние от каждой из которых до точки A в k раз больше, чем расстояние до точки B.*

Решение. Введем на плоскости систему прямоугольных координат так, чтобы точки A и B лежали на оси абсцисс, а начало координат, точка O, находилось в центре отрезка AB (рис. 84). Если обозначить при этом длину отрезка AB через $2a$, то точки A и B получат координаты: $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$.

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка, принадлежащая искомому геометрическому месту. Тогда

$$MA^2 = (x + a)^2 + y^2,$$

$$MB^2 = (x - a)^2 + y^2$$

и соотношение, определяющее геометрическое место точек, имеет вид:

$$\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}=k^2$$

или более просто:

$$x^2(k^2-1)+y^2(k^2-1)-2xa(k^2+1)=a^2(1-k^2).$$

Если $k=1$, то отсюда следует, что $x=0$. Это показывает, что геометрическим местом точек, равноудаленных ($k=1$) от точек A и B, является срединый перпендикуляр к отрезку AB, ось ординат.

Если $k\neq 1$, то можно разделить обе части уравнения на k^2-1. Получим:

$$x^2-2xa\frac{k^2+1}{k^2-1}+y^2=-a^2.$$

Дополняя первые два члена левой части этого уравнения до полного квадрата разности двух чисел, перепишем его в следующем виде:

$$\left(x-a\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2+y^2=\left(\frac{2ak}{k^2-1}\right)^2.$$

Это уравнение описывает окружность с центром в точке O_1:

$$O_1\left(a\frac{k^2+1}{k^2-1},\ 0\right)$$

и радиусом $R=2ak/(k^2-1)$.

Полученную окружность называют «*окружностью Аполлония*». Она представляет геометрическое место точек, расстояния от которых до двух заданных точек плоскости относится как k. Окружность Аполлония легко построить, приняв во внимание, что ее центр лежит на прямой, проходящей через заданные точки, а сама окружность делит отрезок между ними внутренним и внешним образом на части в отношении $k:1$.

Задача 6. *Даны окружность и точка A вне ее. Найти геометрическое место середин отрезков AB, где B — произвольная точка данной окружности.*

Решение. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка, принадлежащая геометрическому месту точек. Начало системы координат удобно выбрать в центре O_1 окружности, а ось абсцисс направить вдоль прямой, проходящей через точки O_1 и A так, что $O_1(0, 0)$, $A(a, 0)$, где a — расстояние от точки A до центра окружности (рис. 85).

Пусть $B(x_1, y_1)$ — произвольная точка окружности такая, что точка M является серединой отрезка AB. Числа x_1 и y_1 связаны между собой уравнением окружности $x_1^2 + y_1^2 = R_1^2$, где R_1 — радиус этой окружности. Поскольку $x = 1/2(x_1 + a)$ и $y = 1/2 \cdot y_1$, то находим соотношение между координатами точки M:

$$(2x - a)^2 + (2y)^2 = R_1^2 \text{ или } \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{R_1}{2}\right)^2.$$

Это уравнение также представляет окружность. Ее центр находится в точке $O_2(a/2, 0)$, а радиус R_2 равен $1/2 \cdot R_1$. Таким образом, искомое геометрическое место точек найдено. Заметим, что окружность O_2 получается из данной окружности преобразованием подобия с центром в точке A и коэффициентом подобия 1/2.

Задача 7. *Найти геометрическое место точек, равноудаленных от заданной прямой и данной точки, лежащей вне этой прямой.*

Решение. Примем заданную прямую за ось абсцисс, а ось ординат направим так, чтобы она проходила через заданную точку (назовем ее F). Точка F имеет координаты 0 и d, где d — расстояние от точки F до прямой (рис. 86).

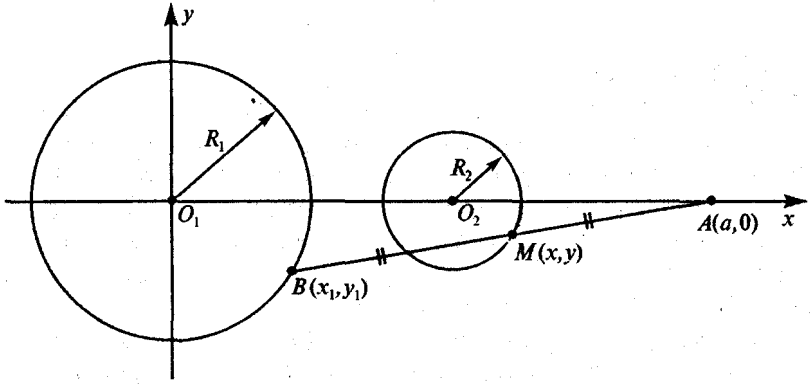


Рис. 85

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка искомого геометрического места. Тогда

$$MF = \sqrt{x^2 + (y-d)^2},$$

$$MA = |y|$$

и числа x и y удовлетворяют уравнению

$$\sqrt{x^2 + (y-d)^2} = |y|.$$

После преобразований и упрощений получим уравнение параболы

$$y = \frac{1}{2d}x^2 + \frac{d}{2}.$$

Таким образом, искомым геометрическим местом точек является парабола, направленная ветвями вверх и делящая отрезок OF пополам.

Указанные в определении геометрического места прямая и точка носят названия **директрисы** параболы и **фокуса** параболы, соответственно.

Задача 8. *На плоскости даны две точки F_1 и F_2, расстояние между которыми равно $2f$. Найти геометрическое место точек, сумма расстояний от каждой из которых до точек F_1 и F_2 равна одному и тому же числу $2a (a > f)$.*

Решение. Введем систему координат таким образом, чтобы ось абсцисс проходила через точки F_1 и F_2, причем начало координат находилось бы в середине отрезка F_1F_2 (рис. 87). Имеем: $F_1(-f, 0)$, $F_2(f, 0)$.

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка, принадлежащая геометрическому месту. Тогда

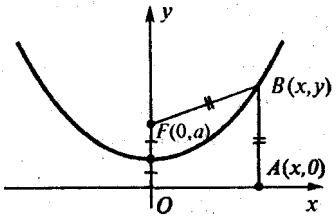


Рис. 86

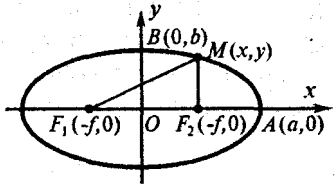


Рис. 87

$$MF_1^2 = (x+f)^2 + y^2,$$

$$MF_2^2 = (x-f)^2 + y^2$$

и свойство точек, принадлежащих геометрическому месту, записывается в виде уравнения

$$\sqrt{(x+f)^2 + y^2} + \sqrt{(x-f)^2 + y^2} = 2a.$$

Преобразуем это уравнение:

$$\sqrt{(x+f)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-f)^2 + y^2},$$

$$a^2 - xf = a\sqrt{(x-f)^2 + y^2},$$

$$x^2(a^2 - f^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - f^2).$$

Разделив обе части уравнения на его правую часть, имеем:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - f^2} = 1$$

и, наконец, обозначив разность $a^2 - f^2$ через b^2, получим:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Кривая с таким уравнением называется **эллипсом**, а числа a и b — его полуосями (рис. 87). Если поочередно полагать в уравнении $x = 0$ и $y = 0$, то можно видеть, что точки A и B имеют координаты $(a, 0)$ и $(0, b)$, соответственно, т.е. длины отрезков AO и BO равны a и b, соответственно.

Точки F_1 и F_2 называются «фокусами» эллипса, точка O — «центром» эллипса, а точки A и B — «вершинами» эллипса. Оси OX и OY служат осями симметрии эллипса.

Если $f = 0$, т.е. точки F_1 и F_2 совпадают, то длины полуосей эллипса равны между собой ($a = b = R$), и уравнение эллипса переходит в уравнение окружности с центром в начале координат:

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1, \quad x^2 + y^2 = R^2.$$

Величина $\varepsilon = f/a$, характеризующая относительное удлинение эллипса, называется его «*эксцентриситетом*». Очевидно, $\varepsilon < 1$. Для окружности $\varepsilon = 0$.

Задача 9. *На плоскости даны две точки F_1 и F_2, расстояние между которыми равно $2f$. Найти геометрическое место точек, для которых разность расстояний (взятая по модулю) до точек F_1 и F_2 есть постоянная величина, равная $2a (a < f)$.*

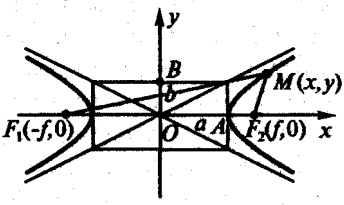


Рис. 88

Решение. Введем систему координат таким образом, чтобы ось абсцисс проходила через точки F_1 и F_2, причем начало координат находилось бы в середине отрезка F_1F_2 (рис. 88).

Имеем: $F_1(-f, 0)$, $F_2(f, 0)$.

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка, принадлежащая искомому геометрическому месту. Тогда

$$MF_1^2 = (x+f)^2 + y^2,$$

$$MF_2^2 = (x-f)^2 + y^2.$$

Свойство точек, входящих в геометрическое место, записывается следующим образом:

$$\left| \sqrt{(x+f)^2 + y^2} - \sqrt{(x-f)^2 + y^2} \right| = 2a.$$

После упрощений, аналогичных предыдущей задаче, получим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{f^2 - a^2} = 1.$$

Поскольку $f > a$, то разность $f^2 - a^2$ можно обозначить через b^2. Окончательно имеем:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Кривая с таким уравнением называется **«гиперболой»**. При указанном выборе системы координат оси координат являются ося-

ми симметрии гиперболы, а начало координат — ее центром симметрии. Точка F_1 и F_2 называются «фокусами» гиперболы.

Гипербола пересекает одну из своей осей; точки пересечения называются «вершинами» гиперболы. Прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$, расположенный симметрично относительно осей гиперболы и касающийся ее в вершинах, называется «основным прямоугольником гиперболы». Диагонали основного прямоугольника являются «асимптотами гиперболы».

Число $\varepsilon = f/a$ называется **«эксцентриситетом»** гиперболы. Очевидно, $\varepsilon > 1$. Если $a = b$, то уравнение гиперболы имеет вид $x^2 - y^2 = a^2$. Такая гипербола называется равносторонней. Если оси координат OX и OY повернуть на 45° вокруг начала координат, то в новых осях уравнение гиперболы будет иметь привычный вид: $xy = k$, где $k = a^2/2$, выражающий обратную пропорциональность двух величин. Можно показать, что график любой гиперболы получается из графика обратной пропорциональности двух величин путем растяжения или сжатия координатных осей и параллельного переноса в ту или иную точку плоскости.

Последние задачи этого параграфа показали, что геометрические свойства фигур и соотношения между их элементами могут быть выражены с помощью алгебраических уравнений между координатами. Изучение геометрических фигур этим способом составляет предмет аналитической геометрии.

ЗАДАЧИ

1. Найти геометрическое место точек, расстояния которых от сторон данного острого угла имеют одно и то же отношение $m : n$; $(m < n)$.

Ответ: Биссектриса этого угла, если $m = n$; два луча, лежащие внутри угла и исходящие из его вершины, если косинус данного угла больше, чем m/n; четыре луча, исходящие из вершины данного угла, притом два из них лежат внутри угла, а два другие — вне угла, если косинус данного угла меньше, чем m/n.

2. Найти геометрическое место середин хорд, проведенных в окружности через данную внутри нее точку.

Ответ: Окружность.

3. Найти геометрическое место середин хорд окружности, образованных прямыми, проходящими через данную точку вне окружности.

Ответ: Дуга окружности.

4. Найти геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух данных пересекающихся прямых постоянна.

Ответ: Контур прямоугольника.

5. Найти геометрическое место точек, для которых сумма квадратов расстояний от двух данных точек есть величина постоянная.

Ответ: Окружность с центром в середине отрезка между данными точками.

6. Найти геометрическое место точек, для которых разность квадратов расстояний от двух данных точек есть величина постоянная.

Ответ: Перпендикуляр к прямой, проходящей через заданные точки и делящий отрезок между ними в определенном отношении.

7. На плоскости дан луч $[OX)$ с вершиной в точке O. Найти геометрическое место точек M, расстояние которых до точки O численно равно углу между лучами $[OX)$ и $[OM)$.

Ответ: Развертывающаяся спираль («спираль Архимеда»).

8. На плоскости дан луч $[OX)$ с вершиной в точке O. Найти геометрическое место точек M, для которых расстояние от точки O численно равно косинусу угла между лучами $[OX)$ и $[OM)$.

Ответ: Окружность.

9. На плоскости дан луч $[OX)$ с вершиной в точке O. Найти геометрическое место точек M, для которых расстояние от точки O численно равно косинусу утроенного угла между лучами $[OX)$ и $[OM)$.

Ответ: Трилистник.

10. На плоскости дан луч $[OX)$ с вершиной в точке O. Найти геометрическое место точек M, для которых расстояние от точки O равно $a(1 - \cos\varphi)$, где a — длина данного отрезка, а φ — величина угла между лучами $[OX)$ и $[OM)$.

Ответ: Кривая, имеющая форму сердца («кардиоида»).

§ 9. ПРЯМЫЕ НА ПЛОСКОСТИ. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Если на плоскости введена система декартовых прямоугольных координат XOY, то каждая точка M плоскости получает пару координат (x, y), а любая прямая может быть записана уравнением

$$Ax + By + C = 0, \qquad (1)$$

выражающим линейную связь между координатами составляющих ее точек. Обратно, каждое линейное уравнение указанного вида определяет прямую на плоскости (предполагается, что числа A и B одновременно не равны нулю).

Уравнение $y = kx + b$ прямой пропорциональной зависимости между величинами $(y - b)$ и x является частным случаем первого уравнения, поэтому оно также определяет прямую на плоскости. Величина k называется угловым коэффициентом прямой: $k = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол наклонапрямой к оси абцисс; параметр b —координата точки, в которой рассматриваемая прямая пересекает ось ординат (рис. 89).

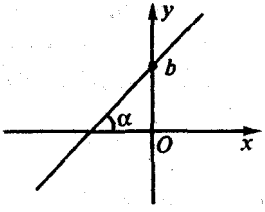


Рис. 89

С помощью уравнения $y = kx + b$ записывается не всякая прямая плоскости. Прямые, перпендикулярные оси абцисс, образуют с ней угол α, равный $\pi/2$, поэтому для них $\operatorname{tg}\alpha$ не существует. В то же время уравнение общего вида (1) определяет любую прямую плоскости, в том числе и вертикальную.

Если $\alpha \neq \pi/2$, то $B \neq 0$ и уравнение (1) можно переписать в следующем виде:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

В этом случае угловой коэффициент определяется формулой:

$$k = \operatorname{tg}\alpha = -\frac{A}{B},$$

а параметр b равен $-C/B$.

Если $\alpha = \pi/2$, т.е. прямая вертикальна, то $B = 0$. Поскольку при этом $A \neq 0$, то уравнение (1) дает $x = -C/A$, являющееся уравнением прямой, перпендикулярной оси абцисс и проходящей через точку с координатой $x = -C/A$. Таким образом, с помощью уравнения (1) можно записать *любую* прямую плоскости, поэтому оно называется *«общим уравнением прямой»*.

Если на плоскости дана точка $P(x_1, y_1,)$, то через нее можно провести бесчисленное множество прямых. Уравнение любой такой прямой имеет вид

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0, \qquad (2)$$

где A и B — произвольные коэффициенты. Действительно, уравнение (2) — линейное, следовательно, оно определяет прямую на плоскости. Кроме того, координаты точки P, числа x_1 и y_1, удовлетворяют этому уравнению. Значит, прямая проходит через данную точку. Если такие прямые не параллельны оси ординат, то $B \neq 0$ и, вводя угловой коэффициент $k = -A/B$, уравнение (2) можно записать в другой форме:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \qquad (2')$$

Если на плоскости даны две точки $P(x_1, y_1)$ и $Q(x_2, y_2)$, то они определяют уже единственную проходящую через них прямую. Если $x_1 \neq x_2$, т.е. такая прямая не вертикальна, то из уравнения (2′) можно найти ее угловой коэффициент. Для этого достаточно подставить в уравнение прямой, проходящей через точку $P(x_1, y_1)$, координаты точки Q. Имеем:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

и уравнение прямой, проходящей через две заданные точки плоскости $P(x_1, y_1)$ и $Q(x_2, y_2)$, имеет вид

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1),$$

или

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \qquad (3)$$

Пример 1. *Написать уравнение прямой, проходящей через точки* $P(1, 3)$ *и* $Q(-1, 4)$.

Решение. Согласно уравнению (3), имеем:

$$\frac{y-3}{4-3}=\frac{x-1}{-1-1}$$

или

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}.$$

Эту же задачу можно было бы решить другим способом, а именно с помощью векторов (см. § 1).

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка прямой (P,Q). Тогда векторы $\overrightarrow{PM}$ и $\overrightarrow{PQ}$ коллинеарны. Координаты этих векторов таковы:

$$\overrightarrow{PM}\{x-1;\ y-3\},\ \overrightarrow{PQ}\{-1\ -1;\ 4-3\}.$$

Поскольку координаты коллинеарных векторов пропорциональны, имеем

$$\frac{y-3}{4-3}=\frac{x-1}{(-1)\ -1},$$

т.е. приходим к тому же уравнению прямой: $y=-0{,}5x+3{,}5$.

Пример 2. *Написать уравнения прямых, являющихся сторонами треугольника ABC, в котором вершины A, B и C имеют координаты* $A(0, 0)$, $B(1, -2)$, $C(3, 5)$.

Решение. Используя уравнение (3), имеем:

$$(AB):\quad \frac{y-0}{-2-0}=\frac{x-0}{1-0}\Rightarrow 2x+y=0;$$

$$(BC):\quad \frac{y-(-2)}{5-(-2)}=\frac{x-3}{3-1}\Rightarrow 7x-2y-11=0;$$

$$(CA):\quad \frac{y-5}{0-5}=\frac{x-3}{0-3}\Rightarrow 5x-3y=0.$$

Пример 3. *Написать уравнение медианы AD треугольника ABC, у которого* $A(0, 0)$, $B(1, -2)$ *и* $C(3, 5)$, *а точка D — середина отрезка BC.*

Решение. Координаты середины отрезка BC находятся как среднее арифметическое координат точек B и C:

$$x_D=\frac{1+3}{2}=2,\quad y_D=\frac{-2+5}{2}=\frac{3}{2}.$$

Уравнение прямой, проходящей через точки A и D, имеет вид:

$$\frac{y-0}{3/2-0}=\frac{x-0}{2-0}\Rightarrow 3x-4y=0.$$

Для геометрической интерпретации коэффициентов A и B, входящих в общее уравнение прямой (1), рассмотрим следующую задачу.

Задача. *Написать уравнение прямой, проходящей через данную точку $P(x_0,y_0)$ перпендикулярно заданному вектору $\vec{n}$, координаты которого $\{A, B\}$.*

Решение. Прежде всего заметим, что условие задачи определяет единственную прямую. Действительно, через данную точку в заданном направлении (перпендикулярном вектору $\vec{n}$) можно провести только одну прямую.

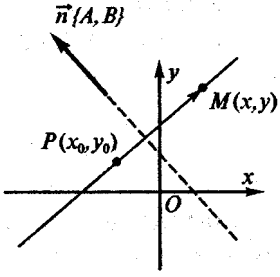


Рис. 90

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка этой прямой (рис. 90). Тогда вектор $\overrightarrow{PM}$ колинеарен этой прямой при любом положении точки M. Отсюда следует, что вектор $\overrightarrow{PM}$ перпендикулярен вектору $\vec{n}$ с координатами $\{A, B\}$.

Так как необходимым и достаточным условием перпендикулярности векторов ($\vec{n}\neq 0$, $A^2+B^2\neq 0$) является условие равенства нулю их скалярного произведения (см. § 1.), т.е. условие

$$(\vec{n}\cdot\overrightarrow{PM})=0,$$

то сумма произведений координат соответствующих векторов равна нулю. Заметив, что вектор $\overrightarrow{PM}$ имеет координаты $\{x-x_0, y-y_0\}$, получим:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$$

или

$$Ax+By+C=0,$$

где

$$C=-Ax_0-By_0.$$

Решение этой задачи показывает, что коэффициенты A и B, стоящие при x и y в общем уравнении прямой (1), можно трактовать как координаты вектора, перпендикулярного данной прямой.

Пример 4. *Написать уравнение прямой, проходящей через точку P с координатами* (–3, 1) *перпендикулярно вектору* $\vec{n}\{2-3\}$.

Решение. Согласно общей формуле, такое уравнение будет иметь вид:

$$2(x+3)-3(y-1)=0$$

или

$$2x-3y+9=0.$$

Пример 5. *Дан треугольник ABC с вершинами* $A(1, 3)$, $B(0, 4)$ *и* $C(-1, 2)$. *Написать уравнение высоты треугольника, опущенной из вершины B на сторону AC.*

Решение. Очевидно, что вектор $\overline{AC}$ перпендикулярен искомой прямой. Его координаты находятся как разности координат точек C и A, т.е. $\{-2, -1\}$. Тогда уравнение высоты будет следующим:

$$-2(x-0)-1(y-4)=0$$

или

$$2x+y-4=0.$$

Угол между прямыми. *Будем называть углом между прямыми тот из двух углов между этими прямыми, который не превосходит прямого.*

Пусть даны две прямые своими уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \text{ и } A_2x+B_2y+C_2=0.$$

Поскольку угол между перпендикулярными им векторами $\vec{n}_1\{A_1, B_1\}$ и $\vec{n}_2\{A_2, B_2\}$ равен по величине углу φ между самими прямыми или дополняет его до 180°, то косинус этого угла можно вычислить через скалярное произведение векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ и их длины (см. § 1):

$$\cos\varphi_1=\frac{(\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2)}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}, \qquad (4)$$

где φ_1 — величина угла между векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$.

Если $A_1A_2+B_1B_2>0$, то угол φ_1 — острый, и угол φ между прямыми равен φ_1.

Если $A_1A_2+B_1B_2=0$, то прямые взаимно перпендикулярны, $\varphi=90°$.

Если $A_1A_2 + B_1B_2 < 0$, то угол φ_1 — тупой, и $\varphi = \pi - \varphi_1$.

Пример 6. *Вычислить угол между прямыми, заданными своими уравнениями*

$$3x - 4y + 1 = 0,$$

$$x + y - 5 = 0.$$

Решение. Для первой прямой вектор $\bar{n}$ имеет координаты {3, –4}, для второй — {1, 1}. Поэтому

$$\cos\varphi_1 = \frac{1\cdot 3 + 1\cdot(-4)}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}\cdot\sqrt{1^2 + 1^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{10},$$

откуда

$$\varphi_1 = \pi - \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{10}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right).$$

Пример 7. *При каких значениях параметра m прямые*

$$mx + 2y - 3 = 0$$

и

$$x + (m-1)y + 1 = 0$$

перпендикулярны?

Решение. Условие перпендикулярности прямых записывается следующим образом:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Поэтому необходимо, чтобы

$$m\cdot 1 + 2(m-1) = 0.$$

Отсюда находим, что $m = 2/3$.

Пример 8. *Вывести условие, которому должны удовлетворять коэффициенты прямых для того, чтобы эти прямые были параллельны.*

Решение. Для параллельных прямых $|\cos\varphi| = 1$. Используя формулу (4) этого параграфа для косинуса угла между прямыми, получим

$$|A_1A_2 + B_1B_2| = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2}. \qquad (5)$$

После упрощений находим искомое условие:

$$A_1B_2 - A_2B_1 = 0. \qquad (6)$$

Если для двух прямых, записанных в виде

$$y = k_1x + b_1 \text{ и } y = k_2x + b_2,$$

известны угловые коэффициенты k_1 и k_2, то угол φ между прямыми определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2} \right|. \qquad (7)$$

Признаком параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов

$$k_1 = k_2. \qquad (8)$$

Признаком перпендикулярности двух прямых является соотношение

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \quad \text{или} \quad k_2 = -\frac{1}{k_1}. \qquad (9)$$

Соотношения (7)–(9) могут быть получены из общих формул (4)–(6), причем соотношение (7) может быть преобразовано к виду:

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2} \right|. \qquad (10)$$

Из него, в частности, следует условие параллельности прямых (6), если φ положить равным нулю.

Пример 9. *Написать уравнение прямой, проходящей через точку* $M(1, 4)$ *параллельно прямой* $2x - 3y + 5 = 0$.

Решение. Уравнение прямой, проходящей через точку $M(1, 4)$, имеет вид

$$y - 4 = k(x - 1),$$

поэтому остается определить только угловой коэффициент k. Для параллельных прямых, согласно формуле (8), коэффициенты k_1 и k_2 равны. Следовательно, $k = 2/3$. Итак, $y = 2/3(x\text{-}1) + 4$.

Пример 10. *Написать уравнения прямых, проходящих через точку* $M(1, -1)$ *под углом* $45°$ *к прямой* $3x - 2y + 1 = 0$.

Решение. Очевидно, что таких прямых две. Поскольку каждая из них проходит через точку M, то их уравнения можно записать в виде

$$y+1=k(x-1).$$

Воспользуемся формулой (7) для тангенса угла между прямыми. Для данной прямой угловой коэффициент равен 3/2, поэтому имеем уравнение для определения k:

$$\operatorname{tg} 45^\circ = 1 = \left| \frac{k-3/2}{1+3/2\cdot k} \right|.$$

Отсюда находим $k_1=-5$, $k_2=1/5$. Следовательно, искомые прямые имеют уравнения $y=-5x+4$ и $y=x/5-6/5$.

Расстояние от точки до прямой. *Пусть дана точка* $P(x_0, y_0)$ и прямая $Ax+By+C=0$ (рис. 91). *Вычислить расстояние от данной точки до данной прямой.*

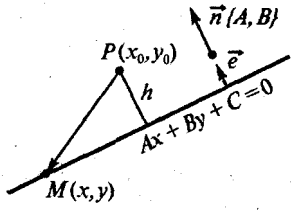


Рис. 91

Поскольку вектор $\vec{n}$ с координатами $\{A, B\}$ перпендикулярен данной прямой, то для подсчета расстояния h от точки P до прямой достаточно спроектировать вектор $\overrightarrow{PM}$ (рис. 91) на направление этого перпендикуляра. Здесь $M(x, y)$ — произвольная точка данной прямой.

Заметим, что скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{e}$, из которых вектор $\vec{e}$ — единичный (т.е. имеет длину, равную единице), равно как раз проекции вектора $\vec{a}$ на направление вектора $\vec{e}$.

Действительно, имеем

$$(\vec{a}\,\vec{e}) = |\vec{a}||\vec{e}|\cos\widehat{\vec{a}\,\vec{e}} = |\vec{a}|\cos\widehat{\vec{a}\,\vec{e}} = \text{проекция}_{\vec{e}}\vec{a},$$

т. к. $|\vec{e}|=1$.

Единичный вектор $\vec{e}$ получим в данном случае из вектора $\vec{n}$, разделив его на $|\vec{n}|$, т.е.

$$\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \vec{e}\left\{\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right\}.$$

Кроме того, имеем $\overrightarrow{PM}\ \{x-x_0, y-y_0\}$. Находим расстояние h:

$$h = \left|\overrightarrow{PM}\cdot\vec{e}\right| = \left|\frac{A(x-x_0)+B(y-y_0)}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$$

или

$$h=\left|\frac{Ax_0+By_0-(Ax+By)}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|.$$

Поскольку точка $M(x, y)$ лежит на прямой, то $Ax+By+C=0$ и $Ax+By=-C$. Заменяя сумму $Ax+By$ в последней формуле ее значением $-C$, получаем формулу для расстояния от точки $P(x_0,y_0)$ до прямой:

$$h=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (11)$$

Пример 11. *Найти расстояние от точки* $P(3, 1)$ *до прямой* $3x-4y+2=0$.

Решение. Воспользовавшись формулой (11), имеем:

$$h=\frac{|3\cdot3-4\cdot1+2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{7}{5}.$$

Пример 12. *Найти высоту треугольника ABC, опущенную из вершины A на сторону BC, если* $A(2, 1)$, $B(-3, 4)$ *и* $C(1, 1)$.

Решение. Запишем сначала уравнение прямой BC, проходящей через две точки B и C. Имеем

$$\frac{y-4}{1-4}=\frac{x-(-3)}{1-(-3)}$$

или

$$3x+4y-7=0.$$

По формуле (11) находим длину высоты треугольника:

$$h=\frac{|3\cdot2+4\cdot1-7|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{3}{5}.$$

Взаимное расположение прямых на плоскости. Пусть две прямые плоскости заданы своими уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1=0,$$

$$A_2x+B_2y+C_2=0,$$

причем $A_1^2+B_1^2\neq0$, $A_2^2+B_2^2\neq0$.

Эти прямые могут пересекаться, быть параллельными или совпадать. Если выражение

$$\Delta = A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0, \qquad (12)$$

то прямые не параллельны, следовательно **пересекаются** в единственной точке.

Если

$$\Delta = A_1B_2 - A_2B_1 = 0, \qquad (13)$$

то прямые **либо параллельны, либо совпадают**.

Последние случаи можно отличить друг от друга, проверив, равно или не равно нулю одно из двух выражений $\Delta_1 = A_1C_2 - A_2C_1$ или $\Delta_2 = B_1C_2 - B_2C_1$. Если они не равны нулю, то прямые параллельны; если же $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$, то прямые совпадают.

В тех случаях, когда соответствующие коэффициенты в уравнениях прямых отличны от нуля, условие параллельности прямых означает простую пропорциональность этих коэффициентов

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}; \qquad (13')$$

условие совпадения прямых —

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}; \qquad (13'')$$

а условие пересечения прямых —

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}. \qquad (12')$$

Пример 13. *Какие из трех данных прямых* $2x + 3y - 4 = 0$, $4x - 2y + 1 = 0$, $2x + y + 4 = 0$ *параллельны прямой* $4x + 2y - 7 = 0$?

Решение. Прямые $2x + y + 4 = 0$ и $4x + 2y - 7 = 0$ параллельны, поскольку только для них выражение $\Delta = A_1B_2 - A_2B_1$ равно нулю. Очевидно также, что эти прямые не совпадают.

Пример 14. *При каких значениях* m *прямые* $mx + (m-1)y + 2 = 0$ *и* $3x + (m-1)y + 1 = 0$ *пересекаются?*

Решение. Подсчитаем выражение $\Delta = A_1B_2 - A_2B_1$. Имеем: $\Delta = m(m-1) - 3(m-1) = (m-3)(m-1)$. Отсюда находим, что $\Delta \neq 0$, если $m \neq 1$ и $m \neq 3$. Именно при таких m прямые пересекаются.

Пример 15. *При каких значениях* m *прямые* $mx + 3y + 1 = 0$ *и* $(m+2)x + 3my + 2 = 0$ *совпадают?*

Решение. В случае совпадения прямых $\Delta = 0$. Следовательно, необходимым условием совпадения прямых является уравнение

$$\Delta = m \cdot 3m - 3(m+2) = 0$$

или

$$m^2 - m - 2 = 0.$$

Отсюда находим $m_1 = -1$, $m_2 = 2$.

При $m = -1$ имеем два уравнения: $-x + 3y + 1 = 0$ и $x - 3y + 2 = 0$. Очевидно, что эти прямые параллельны, но не совпадают.

При $m = 2$ имеем: $2x + 3y + 1 = 0$ и $4x + 6y + 2 = 0$, т.е. прямые совпадают.

ЗАДАЧИ

1. Стороны треугольника ABC заданы уравнениями $4x + 3y - 5 = 0$, $x - 3y + 10 = 0$ и $x - 2 = 0$. Найти координаты его вершин.

Ответ: (2, –1); (–1, 3); (2, 4).

2. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $8x + 3y + 1 = 0$, $2x + y - 1 = 0$ и уравнение одной из его диагоналей $3x + 2y + 3 = 0$. Определить координаты вершин этого параллелограмма.

Ответ: (1, –3); (–2, 5); (5, –9); (8, –17).

3. Дана прямая $2x + 3y + 4 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $P(2,1)$: *а*) параллельно данной прямой; б) перпендикулярно данной прямой.

Ответ: *а*) $2x + 3y - 7 = 0$; б) $3x - 2y - 4 = 0$.

4. Даны вершины треугольника ABC: $A(2, 1)$, $B(-1, -1)$ и $C(3, 2)$. Составить уравнения его высот.

Ответ: $4x + 3y - 11 = 0$; $x + y + 2 = 0$; $3x + 2y - 13 = 0$.

5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $P(3,5)$ на одинаковых расстояниях от точек $A(-7, 3)$ и $B(11, -15)$.

Ответ: $x + y - 8 = 0$; $11x - y - 28 = 0$.

6. Даны уравнения сторон треугольника $3x + 4y - 1 = 0$; $x - 7y - 17 = 0$; $7x + y + 31 = 0$. Вычислить углы треугольника и доказать, что он равнобедренный.

Ответ: $\pi/4$; $\pi/4$; $\pi/2$.

7. Составить уравнения сторон треугольника ABC, если даны одна из его вершин $A(1, 3)$ и уравнения двух медиан $x - 2y + 1 = 0$ и $y - 1 = 0$.

Ответ: $x + 2y - 7 = 0$; $x - 4y - 1 = 0$; $x - y + 2 = 0$.

8. Даны вершины треугольника: $A(-10, -13)$, $B(-2, 3)$ и $C(2, 1)$. Вычислить длину перпендикуляра, опущенного из вершины B на медиану, проведенную из вершины C.

Ответ: 4.

9. Составить уравнения прямых, параллельных прямой $3x - 4y - 10 = 0$ и отстоящих от нее на расстояние $d = 3$.

Ответ: $3x - 4y - 25 = 0$; $3x - 4y + 5 = 0$.

10. Составить уравнения прямых, которые проходят через точку $P(2, -1)$ и вместе с прямыми $2x - y + 5 = 0$ и $3x + 6y - 1 = 0$ образуют равнобедренные треугольники.

Ответ: $x - 3y - 5 = 0$; $3x + y - 5 = 0$.

§ 10. ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

Задачи на построение — это задачи, в которых с помощью циркуля и линейки требуется выполнить то или иное построение, изобразив определенную геометрическую фигуру по ее заданным элементам. Решения таких задач состоят из четырех частей.

Анализ задачи. В этой части, полагая, что задача решена, т.е. требуемая геометрическая фигура построена, разыскивают такие зависимости между ее элементами, которые позволили бы свести данную задачу к другим, известным ранее.

Построение. Выполняется согласно найденному плану решения.

Доказательство. На основании известных теорем производится доказательство того, что построенная фигура удовлетворяет всем условиям задачи.

Исследование. Производится определение условий, при которых задача имеет решение, определяется число существенно различных решений, исследуются особые случаи.

Отметим простейшие построения, которые служат основой для выполнения других, более сложных.

1. Построить отрезок, равный данному.
2. Построить угол, равный данному.
3. Разделить данный отрезок пополам.
4. Разделить данный угол пополам.
5. Через данную точку провести прямую, параллельную данной прямой.
6. Из данной точки, не принадлежащей данной прямой, опустить на эту прямую перпендикуляр.
7. Из данной точки, лежащей на прямой, восставить к этой прямой перпендикуляр.
8. Построить треугольник по трем сторонам (т.е. построить треугольник, стороны которого были бы равны трем заданным отрезкам).
9. Построить треугольник по двум сторонам и заключенному между ними углу (т.е. построить треугольник, две стороны кото-

рого и угол, заключенный между ними, были бы равны двум заданным отрезкам и заданному углу соответственно).

10. Построить треугольник по стороне и двум прилежащим к ней углам (т.е. построить треугольник, сторона которого и два прилежащих к ней угла были бы равны отрезку и двум заданным углам соответственно).

Кроме того, напомним решения еще двух задач, требующих построить отрезок, длина которого x удовлетворяла бы уравнениям:

$$ax = bc,$$

$$x^2 = ab,$$

где a, b и c — длины трех заданных отрезков. Решение первого из этих уравнений позволяет разрешить пропорцию

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \Rightarrow x = \frac{bc}{a};$$

решение второго — найти «среднее геометрическое» двух заданных отрезков

$$x = \sqrt{ab}.$$

Решение первой задачи понятно из рис. 92. На одной из сторон произвольного угла от его вершины A откладываются последовательно отрезки AB и BC, равные заданным отрезкам с длинами a и b. На другой стороне угла откладывается отрезок AD, равный третьему отрезку с длиной c. Затем проводится прямая BD и через точку C — прямая $CE \parallel BD$. Получающийся при этом отрезок DE будет искомым, поскольку его длина x должна удовлетворять пропорции $AB : BC = AD : DE$ или $a : b = c : x$ в силу известной теоремы Фалеса (об отрезках, отсекаемых параллельными прямыми на сторонах угла).

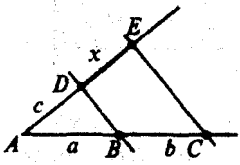


Рис. 92

Заметим, что длина x отрезка DE прямо пропорциональна длинам b и c и обратно пропорциональна длине a. Поэтому рассмотренный метод решения позволяет строить отрезки как пропорциональные, так и обратно пропорциональные данным. Например, имеется множество отрезков с длинами

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$$

и требуется построить им пропорциональные отрезки с длинами $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ такие, что

$$\frac{b_1}{x_1} = \frac{b_2}{x_2} = \ldots \frac{b_n}{x_n}.$$

Очевидно, что взяв два произвольных отрезка с длинами a и c, можно построить множество искомых отрезков указанным методом по формуле

$$x_i = b_i \cdot \frac{c}{a}, \text{ где } i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

В случае необходимости построить множество отрезков, длины $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ которых обратно пропорциональны длинам $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$, опять задаемся двумя произвольными отрезками с длинами a и c и выполняем требуемое построение по формуле

$$y_i = a\frac{c}{b_i}, \text{ где } i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Решение второй задачи о построении **среднего геометрического** двух отрезков иллюстрируется рис. 93. На прямой последовательно откладываются два отрезка AB и BC такие, что $AB = a$ и $BC = b$. Затем на отрезке AC как на диаметре строится окружность радиуса $(a + b)/2$ и из точки B восстанавливается перпендикуляр к прямой AC до его пересечения в точке E с окружностью. Поскольку ΔAEC — прямоугольный ($\angle AEC$ — опирается на диаметр AC) и BE — его высота, то по известной теореме $BE^2 = AB \cdot BC$, т.е. $BE = \sqrt{ab}$. Таким образом, очевидно, что следует принять $x = BE$.

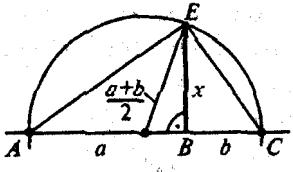


Рис. 93

В дальнейшем будем ссылаться на эти простейшие задачи как на известные.

Рассмотрим ряд задач на построение.

Задача 1. *Построить треугольник по периметру* $2p$ *и двум углам, величины которых равны* α *и* β.

Решение. *Анализ задачи.* Пусть ABC — искомый треугольник, в котором $AB + BC + CA = 2p$ и $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{BCA} = \beta$ (рис. 94).

Если на продолжении основания AC за точку A отложить отрезок DA, такой, что $DA = AB$, а за точку C — отрезок CE, такой, что $CE = CB$, то длина всего отрезка DE будет равна как раз периметру $2p$.

Соединив точки D и E с вершиной треугольника B, получим два равнобедренных треугольника DBA и EBC. В этих треугольниках $\widehat{ADB} = \widehat{ABD} = \alpha/2$ и $\widehat{CBE} = \widehat{CEB} = \beta/2$, поскольку внешние углы $\widehat{BAC}$ и $\widehat{BCA}$ равны сумме двух с ними несмежных углов соответствующих треугольников. Таким образом, в треугольника DBE известны длина основания $DE = 2p$ и величины углов при основании $\alpha/2$ и $\beta/2$. Следовательно, ΔDBE можно построить известным способом. Далее при вершине B известным способом можно построить углы $\widehat{DBA} = \alpha/2$ и $\widehat{CBE} = \beta/2$. Стороны этих углов определят две другие вершины A и C искомого треугольника ABC.

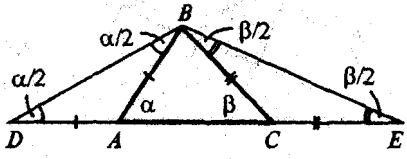


Рис. 94

Построение. По данным в условии задачи элементам строим ΔDBE ($DE = 2p$, $\widehat{BDE} = \alpha/2$, $\widehat{BED} = \beta/2$). Затем при вершине B строим углы $\widehat{DBA} = \alpha/2$ и $\widehat{EBC} = \beta/2$; получаем точки A и C. Треугольник ABC — искомый.

Доказательство. Действительно, периметр треугольника ABC равен $2p$, поскольку треугольники ABD и CBE — равнобедренные по построению, т.е. в них $AD = AB$ и $CB = CE$; следовательно, $AB + BC + CA = AD + CE + CA = DE = 2p$.

Угол $\widehat{BAC} = \alpha$ как внешний угол к треугольнику ABD; $\widehat{BCA} = \beta$, как внешний угол к треугольнику CBE.

Анализ задачи. Задача имеет решение, если $\alpha + \beta < \pi$. Очевидно также, что это решение единственное с точностью до положения треугольника ABC на плоскости.

Задача 2. *Построить треугольник по трем медианам (т.е. построить треугольник, у которого медианы были бы равны трем заданным отрезкам).*

Решение. *Анализ задачи.* Предположим, что задача решена и искомый треугольник ABC построен, AM, BN и CP — его медианы, причем $AM = m_a$, $BN = m_b$, $CP = m_c$ (рис. 95).

Рассмотрим ΔBEC. Точка M — середина его основания, а боковые стороны BE и CE таковы, что $BE = 2/3 \cdot m_b$, $CE = 2/3 \cdot m_c$. Если продлить медиану AM за точку M на отрезок MF с длиной $1/3 \cdot m_a$, соединить точку F с вершинами B и C, то получившийся четырехугольник $BECF$ будет, очевидно, параллелограммом, поскольку его диагонали, пересекаясь, делятся пополам ($BM = MC$, $EM = MF = 1/3 \cdot m_a$). В таком случае $BF = EC = 2/3 \cdot m_c$.

После этого анализа становится ясно, что в ΔBEF известны длины всех сторон — каждая из них равна 2/3 длины соответствующей медианы треугольника ABC. Значит, ΔBEF можно построить известным способом. Продлив затем его основание EF за точку E на расстояние EF, мы получим вершину A, а продлив его медиану BM за точку M на расстояние BM — вершину C ΔABC, т.е. построим искомый треугольник.

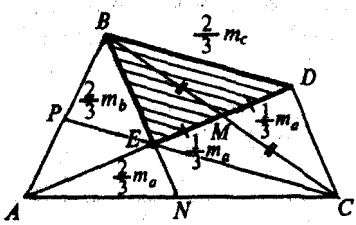


Рис. 95

Построение. Построим треугольник BEF по трем сторонам с длинами $2/3 \cdot m_a$, $2/3 \cdot m_b$, $2/3 \cdot m_c$. Для этого сначала с помощью пропорционального деления разделим каждый из трех заданных в условии отрезков на три равные по длине части и возьмем по две части каждого. Затем на продолжении отрезка EF за точку E отложим отрезок EA ($EA = 2/3 \cdot m_a$), построив тем самым точку A. Разделим отрезок EF пополам, проведем прямую BM через его середину M и отложим на ней отрезок MC ($MC = BM$), построив тем самым точку B. Наконец, соединив точки A, B и C отрезками прямых, получим треугольник ABC.

Доказательство. ΔABC — искомый. AM — медиана, поскольку $BM = MC$ — по построению. Точка E — центр тяжести треугольника ABC, поскольку $EM = 1/3 \cdot m_a$, $AE = 2/3 \cdot m_a$ — по построению. Следовательно, отрезки CP и BN будут двумя другими медианами ΔABC. Кроме того, $BECF$ — параллелограмм по построению. Следовательно, $EC = BF = 2/3 \cdot m_c$ и $BE = 2/3 \cdot m_b$ — по построению. Это означает, что $BN = m_b$ и $CP = m_c$, что и требовалось доказать.

Исследование. Анализ задачи и построение показывает, что она имеет решение тогда и только тогда, когда длины данных отрезков m_a, m_b и m_c позволяют построить по ним треугольник, т.е. тогда, когда выполняются известные неравенства $m_a + m_b > m_c$, $m_b + m_c > m_a$ и $m_a + m_c > m_b$. В этом случае задача имеет единственное решение с точностью до расположения треугольника на плоскости.

Задача 3. *Построить треугольник по трем высотам (т.е. построить треугольник, у которого высоты были бы равны трем заданным отрезкам).*

Решение. *Анализ задачи.* Предположим, что задача решена и искомый треугольник ABC построен, AM, BN и CP — его высоты, причем $AM = h_a$, $BN = h_b$, $CP = h_c$ (рис. 96).

Обозначим длины сторон треугольника a, b и c, соответственно. Очевидно, что $ah_a = bh_b = ch_c = 2S$, где S — площадь треугольника. Отсюда следует, что длины сторон треугольника a, b и c обратно пропорциональны длинам его высот $h_a h_b$ и h_c:

$$a : b : c = \frac{2S}{h_a} : \frac{2S}{h_b} : \frac{2S}{h_c}.$$

Поэтому можно построить, хотя и не единственным способом, три отрезка, длины которых a', b' и c' будут обратно пропорциональны высотам искомого треугольника и, следовательно, прямо пропорциональны его сторонам (как это делается, было показано выше). Значит, треугольник со сторонами a', b' и c' будет подобен искомому.

Пусть $\Delta A'B'C'$ — треугольник со сторонами a', b' и c' построен. Тогда определятся его высоты — h'_a, h'_b и h'_c. Очевидно, что коэффициент k подобия этого треугольника искомому определяется отношениями

$$k = \frac{h'_a}{h_a} = \frac{h'_b}{h_b} = \frac{h'_c}{h_c}.$$

Поэтому, имея треугольник $A'B'C'$, нетрудно достроить его до искомого треугольника ABC.

Построение. Построим сначала указанным выше способом три отрезка, длины которых a', b' и c' были бы обратно пропорциональны длинам h_a, h_b и h_c, соответственно. Затем построим треугольник $A'B'C'$ по трем сторонам с длинами a', b' и c'. Из одной из вершин треугольника $A'B'C'$, например, из вершины B', опустим на его основание $A'C'$ высоту $B'N$. На получившемся перпендикуляре к основанию в точке N отложим отрезок NB, такой, что $NB = h_b$. Через полученную точку B проведем прямые, параллельные боковым сторонам треугольника $A'B'C'$, а именно: $BA \parallel B'A'$

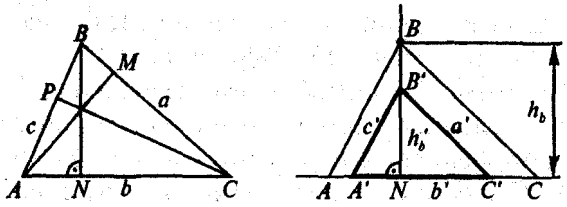


Рис. 96

и $BC \parallel B'C'$ до пересечения их с основанием $A'C'$ в точках A и C. Треугольник ABC — искомый.

Доказательство. Во-первых, ясно, что построенный треугольник подобен искомому. Действительно, его стороны по построению параллельны сторонам треугольника $A'B'C'$, а следовательно, он подобен этому треугольнику. В свою очередь последний подобен искомому, поскольку его стороны пропорциональны сторонам искомого треугольника. Таким образом, построенный треугольник подобен искомому. Во-вторых, коэффициент подобия построенного и искомого треугольников равен 1, поскольку высоты, опущенные из вершины B в этих треугольниках, имеют равные длины (также по построению). Следовательно, эти треугольники равны, и высоты построенного треугольника имеют заданные длины.

Исследование. Задача может быть решена в том случае, если по трем отрезкам, длины которых обратно пропорциональны заданным отрезкам h_a, h_b и h_c, можно построить треугольник, причем задача имеет единственное решение.

В последней задаче искомый треугольник был построен с помощью преобразований подобия, примененного к другому треугольнику, подобному искомому. Этот метод можно использовать и во многих других задачах на построение. Рассмотрим несколько частных примеров.

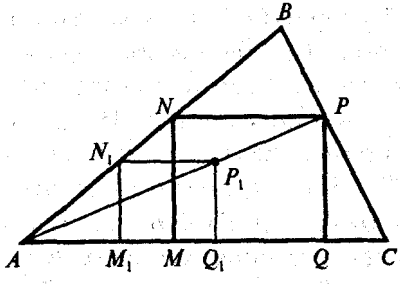


Рис. 97

Задача 4. *В данный треугольник вписать прямоугольник с заданным отношением $m : n$ сторон (предполагается, что две вершины такого прямоугольника должны лежать на основании треугольника, а каждая из двух других— на боковой стороне данного треугольника).*

Решение. *Анализ задачи.* Пусть задача решена и прямоугольник $MNPQ$, вписанный в данный треугольник ABC (рис. 97), имеет требуемое отношение сторон $MN : MQ = m : n$.

Можно заметить, что преобразование подобия с центром в вершине A треугольника, примененное к рассматриваемому прямоугольнику, отображает вершины M, N и Q на соответствующие вершины M_1, N_1 и Q_1 подобного ему прямоугольника $M_1N_1P_1Q_1$, лежащие на сторонах того же треугольника, причем, естествен-

но, отношение сторон прямоугольника сохраняется. Единственно, что при этом вершина P прямоугольника $MNPQ$ отображается в вершину P_1 подобного прямоугольника $M_1N_1P_1Q_1$ уже не лежащую на стороне данного треугольника. Однако именно это обстоятельство открывает следующую возможность решения задачи: построить внутри угла BAC прямоугольник $M_1N_1P_1Q_1$, три вершины которого лежат на сторонах этого угла, причем $M_1N_1 : M_1Q_1 = m : n$, а затем подобным преобразованием увеличить (или уменьшить) его до таких размеров, при которых и четвертая вершина P оказалась бы лежащей на сторонах треугольника ABC. Для этого достаточно провести прямую AP_1 до пересечения ее со стороной BC треугольника ABC в точке P. Коэффициент $k = AP : AP_1$ и определит искомый коэффициент подобия.

Построение. Из произвольной точки M_1 основания AC треугольника ABC восставим перпендикуляр M_1N_1. Построим отрезок M_1Q_1, длина которого равна $m/n \cdot M_1N_1$ (используя для этой цели уже указанный выше прием, основанный на теореме Фалеса), и достроим фигуру до прямоугольника $M_1N_1P_1Q_1$. Затем через точки A и P_1 проведем прямую до пересечения в точке P со стороной BC треугольника. Из точки P проведем прямые $PN \parallel AC$ и $PQ \parallel NM$. Из точки N опустим перпендикуляр на основание AC. Фигура $MNPQ$ — искомый прямоугольник.

Доказательство. То, что фигура $MNPQ$ — прямоугольник, следует из построения. Из подобия треугольников AP_1N_1 и APN, а также AP_1Q_1 и APQ следует

$$\frac{PN}{P_1N_1} = \frac{AP}{AP_1}; \quad \frac{PQ}{P_1Q_1} = \frac{AP}{AP_1}.$$

Отсюда находим:

$$\frac{PQ}{PN} = \frac{P_1Q_1}{P_1N_1} = \frac{m}{n}.$$

Следовательно, отношение сторон построенного прямоугольника равно $m : n$, что и требовалось доказать.

Исследование. Задача имеет единственное решение при любом отношении чисел $m : n$.

Задача 5. *Внутри угла BAC дана точка M. Построить окружность, касающуюся сторон данного угла и проходящую через точку M.*

Решение. *Анализ задачи.* Предположим, что искомая окружность построена (рис. 98). Очевидно, что ее центр O лежит на биссектрисе угла BAC.

На этой же биссектрисе лежит центр и любой другой окружности, касающийся сторон данного угла, однако такие окружности, вообще говоря, не проходят через заданную точку M. Рассмотрим одну из таких окружностей с центром в точке O_1 (рис. 98). Очевидно, что она может быть получена из окружности O преобразованием подобия с центром в точке A, причем заданная точка M отобразится в одну из двух точек M_1 или M_2, получающихся в результате пересечения луча с окружностью O_1. Таким образом, нетрудно построить комбинацию фигур, подобную искомой. Если затем увеличить (или уменьшить) ее линейные размеры путем преобразования подобия с коэффициентом $k = AM/AM_1$, то получится искомая фигура.

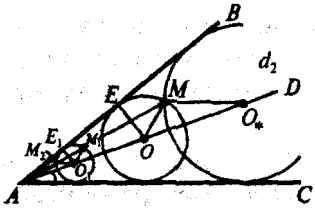


Рис. 98

Построение. Построим сначала биссектрису AD угла BAC, на которой должен лежать центр искомой окружности. Приняв любую точку O_1 этой биссектрисы за центр окружности, подобной искомой, впишем эту окружность в угол BAC.

Соединим точки M и A лучом AM, получив тем самым на окружности O_1 две точки M_1 и M_2, которые в результате преобразования подобия могут отобразиться на заданную точку M, т.е. служить ее прообразом. Соединим точку M_1 или точку M_2 с центром O_1 вспомогательной окружности.

Если теперь с помощью преобразований подобия увеличить (или уменьшить) линейные размеры треугольника $AM_1O_1(AM_2O_1)$ в AM/AM_1 (или AM/AM_2) раз, то точка O_1 отобразиться на некоторую точку O, которая и будем центром искомой окружности. Известно, что каждая прямая в результате такого преобразования отображается на параллельную ей прямую, поэтому для построения точки O достаточно провести через точку M прямую, параллельную O_1M_1 или (O_1M_2). Пересечение такой прямой с биссектрисой AD дает центр O искомой окружности.

Доказательство. Покажем, что окружность с центром в точке O (или O_*) и радиусом OM (или O_*M) касается сторон данного угла. Поскольку $O_1E_1 = O_1M_1$ по построению, а искомая окружность по-

лучена из окружности O_1 преобразованием подобия, то $OM = OE$. Это ясно и из пропорций:

$$\frac{OM}{O_1M_1} = \frac{AO}{AO_1} \quad \frac{OE}{O_1E_1} = \frac{AO}{AO_1}.$$

Так как $O_1E_1 = O_1M_1$, то $OE = OM$.

Исследование. Очевидно, что если точка M лежит строго внутри заданного угла, то задача имеет ровно два решения.

Рассмотрим еще несколько характерных задач на построение.

Задача 6. *Построить окружность, касающуюся данной окружности и данной прямой в заданной на этой прямой точке (данные окружность и прямая не пересекаются).*

Решение. *Анализ задачи.* Пусть задача решена и искомая окружность (ее центр обозначим O_1) построена (рис. 99). Эта окружность касается данной окружности (с центром в точке O) в точке B, а данной прямой MN — в заданной на ней точке A.

Прежде всего ясно, что расстояния O_1A и O_1B равны, поскольку точка O_1 должна быть равноудалена от точек A и B. Отсюда следует что расстояние O_1O между центрами окружностей больше длины перпендикуляра O_1A к прямой MN на величину R радиуса данной окружности. Значит, если отложить на продолжении отрезка O_1A за точку A отрезок AO_2, такой, что $AO_2 = R$, то расстояния O_1O и O_1O_2, будут равны между собой. Таким образом, точка O_1 равноудалена от точек O и O_2 и является центром окружности, касающейся прямой MN в заданной на ней точке A.

Построение. Проведенный анализ показывает, что центр O_1 искомой окружности может быть построен как пересечение двух геометрических мест точек (см. § 8): одного из них — множества точек, равноудаленных от двух данных точек O и O_2 (срединный перпендикуляр к отрезку OO_2) и другого — множества центров окружностей, касающихся данной прямой в заданной на ней точке A (перпендикуляр к прямой MN в точке A). Каждое из геометрических мест строится известными способами.

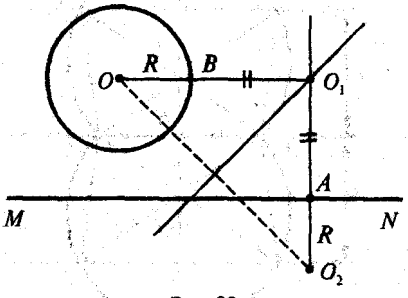


Рис. 99

Доказательство. $O_1A \perp MN$ — по построению, следовательно, окружность с центром в точке O_1 и радиусом O_1A касается прямой MN. $O_1O_2 = O_1O$ — по построению, следовательно, $O_1B = O_1O - R = O_1O_2 - R = O_1A$. Значит, эта окружность касается данной окружности.

Исследование. Очевидно, что задача всегда имеет решение и притом только одно.

Нахождение искомой точки как результата пересечения двух геометрических мест может быть использовано и в других задачах на построение. Проиллюстрируем это еще одним примером.

Задача 7. *Построить треугольник по основанию, противолежащему ему углу при вершине и высоте (т.е. построить треугольник, у которого основание, высота, опущенная на него из противолежащей вершины, и угол при этой вершине были бы равны двум заданным отрезкам и данному углу).*

Решение. *Анализ задачи.* Пусть искомый треугольник ABC построен (рис. 100*а*). В нем длина основания AC равна a, высота равна h, угол $\widehat{ABC} = \alpha$.

Из вершины B треугольника отрезок AC виден под углом α, значит, точка B должна принадлежать геометрическому месту точек, о котором уже шла речь (см. § 1, рис. 7), т.е. лежать на

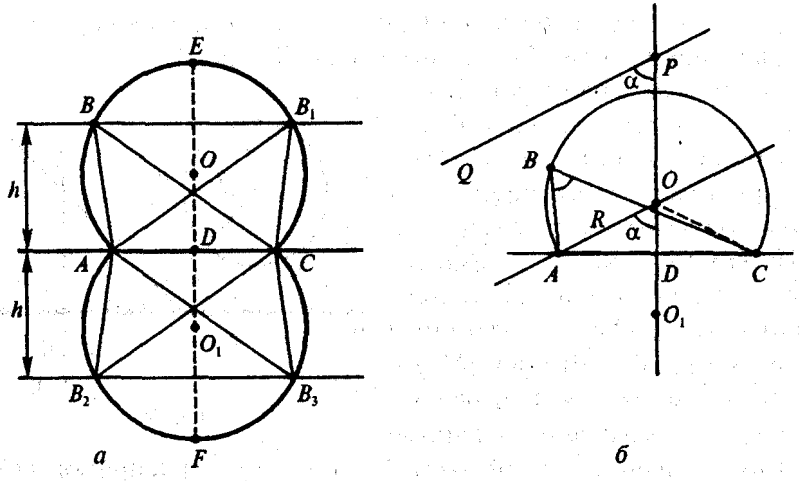


Рис. 100

окружности радиуса R, опирающийся на данный отрезок. Радиус этой окружности определяется теоремой синусов:

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha}.$$

Кроме того, поскольку вершина A удалена от основания треугольника на расстояние h, то она должна принадлежать соответствующему геометрическому месту точек, состоящему из двух прямых, параллельных основанию AC, и отстоящих от него на расстояние h. Значит, вершина B принадлежит пересечению этих геометрических мест и может быть построена таким способом.

Построение. Имея в виду, что построить две прямые M_1N_1 и M_2N_2, параллельные AC и отстоящие от нее на расстояние h, нетрудно, покажем только, как строится геометрическое место точек, из которых данный отрезок AC виден под данным углом α (известно, что это две симметричные дуги окружностей с радиусами R).

Из середины D отрезка AC восставим к прямой AC перпендикуляр. Возьмем на этом перпендикуляре произвольную точку P и проведем через нее прямую PQ под заданным углом α и к восставленному перпендикуляру.

Через вершину A треугольника проведем прямую AO, параллельную прямой PQ до пересечения ее в точке O с перпендикуляром DP. Точку O примем за центр первой окружности, а симметричную ей точку O_1 — за центр второй окружности (рис. 100*б*). Фигура $AECFA$ — искомое геометрическое место.

Точки B, B_1, B_2 и B_3 пересечения двух построенных геометрических мест определяют возможное положение вершин искомого треугольника.

Доказательство. Любой из построенных треугольников ABC, AB_1C, AB_2C или AB_3C (а они все равны) будет искомым. Действительно, основание и высота каждого из них имеют, по построению, заданные длины a и h, соответственно.

Покажем, что угол при вершине каждого треугольника, например ΔABC, равен α. Поскольку угол $\widehat{AOD}$ равен по построению углу $\widehat{OPD}$ и равен α, то центральный угол $\widehat{AOC}$ равен 2α. Поэтому любой вписанный в окружность угол, как, например, углы ABC, AB_1C, AB_2C или AB_3C, опирающийся на хорду AC, равен половине центрального угла, т.е. α.

Исследование. Очевидно, что с точностью до равенства треугольников задача имеет единственное решение. При этом оно существует только в том случае, если длина h высоты треугольника не больше длины отрезка DE (рис. 100), т.е. удовлетворяет неравенству $h \le R + R\cos\alpha$ или $h \le R(1+\cos\alpha)$. Отсюда получаем:

$$h \le a(1+\cos\alpha)/2\sin\alpha.$$

Задача 8. *Построить треугольник по медиане, биссектрисе и высоте, проведенным к стороне из противоположной ей вершины (т.е. построить треугольник, в котором медиана, биссектриса и высота, выпущенные из какой-либо вершины, были бы равны трем заданным отрезкам).*

Решение. *Анализ задачи.* Пусть ABC — искомый треугольник (рис. 101). Длины его медианы BD, биссектрисы BE и высоты BF обозначим через m, l и h, соответственно.

Установим сначала немаловажный факт: *во всяком треугольнике биссектриса лежит между медианой и высотой, проведенными из той же вершины.* Для доказательства опишем вокруг ΔABC окружность (ее центр — точка O), так что угол ABC окажется вписанным, а основание AC — хордой этой окружности. Поскольку биссектриса BE делит угол ABC пополам, то ее продолжение EH должно разделить пополам дугу $\overset{\frown}{AC}$, на которую опирается рассматриваемый угол ($\widehat{ABH} = \widehat{CBH}$). Поскольку далее D — середина основания ΔABC и, следовательно, середина хорды AC окружности, то срединный перпендикуляр к отрезку AC должен пройти как через центр O окружности, так и через середину H дуги $\overset{\frown}{AC}$. Треугольник DHE — прямоугольный, причем угол DEH — острый. Поэтому дополнительный для него угол DEB — тупой. Следовательно, ΔDEB — тупоугольный. Отсюда следует, что высота BF, опущенная из вершины B острого угла тупоугольного треугольника на основание, попадает на продолжение этого основания, т.е. точка E лежит между точками D и F, что и доказывает сформулированное утверждение.

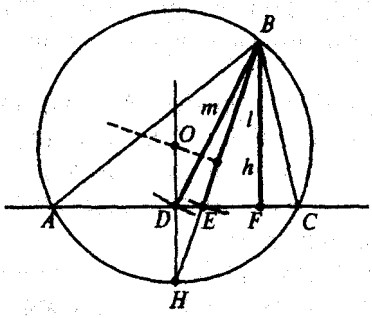


Рис. 101

Построение. Из произвольной точки F прямой восставим к ней перпендикуляр FB, такой, что $FB = h$. Из точки B, приняв ее за вершину искомого треугольника, растворами циркуля m и l опи-

шем дуги окружностей до пересечения их в точках D и E с выбранной прямой. Примем, что BD и BE — это медиана и биссектриса искомого треугольника, соответственно. В точке D восставим перпендикуляр к прямой до пересечения его в точке H с прямой BH, продолжением биссектрисы BE за точку E. С одной стороны, центр описанной окружности должен лежать на срединном перпендикуляре к отрезку AC, т.е. на перпендикуляре DH. С другой стороны, он равноудален от точек B и H, следовательно, он лежит на срединном перпендикуляре к отрезку BH. Пересечение этих двух перпендикуляров дает точку O. Описав из точки O, как из центра, окружность радиуса OB, получим точки A и C ее пересечения с исходной прямой. Приняв эти точки за вершины треугольника, получим треугольник ABC.

Доказательство. Треугольник ABC — искомый. В нем высота BF имеет длину h по построению. BD — медиана, поскольку точка D — середина отрезка AC, также по построению. Ее длина равна m. Наконец, отрезок BE является биссектрисой, поскольку его продолжение попадает в середину дуги AC и, следовательно, угол $\widehat{ABE}$ равен углу $\widehat{CBE}$. Кроме того, по построению длина этого отрезка равна l.

Исследование. Задача имеет единственное решение, которое возможно при условии $h \le l \le m$.

В заключение этого параграфа рассмотрим несколько задач о построении отрезков, длины которых выражаются той или иной алгебраической формулой. Следует отметить, что многие задачи на построение допускают прием решения, при котором некоторый элемент геометрической фигуры сначала рассчитывается аналитически и находится формула, выражающая его величину через заданные длины и углы. Затем указывается способ, как построить этот элемент (по полученной для него формуле) с помощью циркуля и линейки. Задачи о построении отрезков по формулам являются одним из этапов указанного пути.

Задача 9. *Заданы отрезки длиной a,b,c и d. Построить отрезок, длина которого выражается формулой $\sqrt{abcd}$.*

Решение. Корень четвертой степени из произведения отрезков может быть представлен в следующем виде:

$$\sqrt[4]{abcd} = \sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}}.$$

Поскольку известно, как построить среднее геометрическое двух отрезков, то сначала можно построить отрезок с длиной $x_1 = \sqrt{ab}$,

затем — отрезок с длиной $x_2 = \sqrt{cd}$, наконец — искомый отрезок с длиной $\sqrt{x_1 x_2}$.

Задача 10. *Заданы отрезки длиной a и b. Построить отрезок, длина которого выражается формулой* $\sqrt{2a^2 + 7b^2}$.

Решение. Построим сначала отрезок с длиной $x_1 = \sqrt{2a^2}$, представив его как среднее геометрическое отрезков с длинами a и $2a$, т.е. $\sqrt{a \cdot 2a}$. Затем построим отрезок с длиной $x_2 = \sqrt{7b^2}$, представив его как среднее геометрическое отрезков b и $7b$, т.е. $x_2 = \sqrt{b \cdot 7b}$. Наконец, построим искомый отрезок, представив его в виде гипотенузы прямоугольного треугольника с катетами x_1 и x_2, т.е.

$$\sqrt{2a^2 + 7b^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Задача 11. *Заданы три отрезка, длины которых a, b и c. Построить отрезок x, с длиной, выраженной формулой*

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Решение. Построим сначала отрезок y, длина которого выражается формулой

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Для этого запишем последнюю формулу в виде $(a + b)/a = b/y$. Тогда становится очевидным, что y можно найти как четвертое пропорциональное для отрезков $a + b$, a и b. На одной из сторон произвольного угла от его вершины последовательно откладываем отрезки $a + b$ и a; на другой стороне — отрезок b. Через концы отрезков проводим параллельные прямые (рис. 102). В результате построения получаем отрезок DE с длиной y.

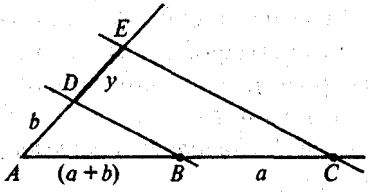


Рис. 102

После того как отрезок DE построен, нетрудно построить искомый отрезок. Очевидно, что

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{c},$$

поэтому отрезок с длиной x строится аналогично предыдущему.

ЗАДАЧИ

1. Построить прямоугольный треугольник: а) по гипотенузе и отношению катетов; б) по катету и отношению другого катета к гипотенузе.

2. Построить треугольник: а) по основанию, высоте и медиане, проведенной к боковой стороне; б) по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них.

3. Вписать в данный сегмент квадрат.

4. Вписать в данный сегмент прямоугольник с заданным отношением сторон.

5. Построить треугольник по стороне, противолежащему ей углу и разности двух других сторон.

6. Дана прямая и две точки по одну сторону от нее. Построить окружность, проходящую через данные точки и касающуюся данной прямой.

7. Провести через точку M, находящуюся вне круга, прямую, на которой окружность высекает отрезок заданной длины a.

8. Через данную точку, лежащую внутри данного угла, провести прямую так, чтобы она отсекала от угла треугольник наименьшей площади.

9. Провести через точку M внутри круга хорду заданной длины a..

10. Заданы отрезки с длинами a, b, c и d. Построить отрезки, длины которых выражаются следующими формулами:

а) $\sqrt{3ab+2cd}$, б) $\sqrt{a^2+b^2-c^2-d^2}$,

в) $\sqrt{a^3/b+c^3/d}$, г) $\sqrt[4]{a^3b}$,

д) $(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})^4$ е) $(a^4+b^4)/(a^3+b^3)$.

§ 11. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Даны две концентрические окружности. Касательная к меньшей окружности делит длину дуги большей окружности в отношении 1 : 5. Найти отношение площадей кругов, ограниченных этими окружностями.

Ответ. 4 : 3.

2. Дан ромб с острым углом α. Какую часть площади ромба составляет площадь вписанного в него круга?

Ответ. $\pi \sin \alpha/4$.

3. В окружность вписана трапеция $ABCD$, причем ее основания $AB = 1$ и $DC = 2$. Обозначим точку пересечения диагоналей этой трапеции через F. Найти отношение суммы площадей треугольников ABF и CDF к сумме площадей треугольников AFD и BFC.

Ответ. 5/4.

4. В прямоугольной равнобедренный треугольник ABC с прямым углом при вершине B вписан прямоугольный треугольник MNC так, что $\widehat{MNC} = 90°$, точка N лежит на AC, а точка M — на стороне AB. В каком отношении точка N должна делить гипотенузу AC, чтобы площадь треугольника MNC составляла 3/8 от площади треугольника ABC?

Ответ. 3/4.

5. В треугольнике ABC длины боковых сторон AB и BC равны a, угол $\widehat{ABC} = 120°$. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке D. Вторая окружность имеет центром точку B и проходит через точку D. Найти площадь той части вписанного круга, которая находится внутри второго круга.

Ответ. $a^2(7 - 4\sqrt{3})(5\pi - 6\sqrt{3})/24$.

6. На стороне AC остроугольного треугольника ABC взята точка D так, что $AD = 1$, $DC = 2$ и BD является высотой треугольника ABC. Окружность с радиусом 2, проходящая через точки A и D,

касается в точке D окружности, описанной около треугольника BDC. Найти площадь треугольника ABC.

Ответ. $3\sqrt{15}$.

7. Дан квадрат $ABCD$, длина стороны которого равна a, и построены две окружности. Первая окружность целиком расположена внутри квадрата $ABCD$, касается стороны AB в точке E, а также касается стороны BC и диагонали AC. Вторая окружность имеет центром точку A и проходит через точку E. Найти площадь общей части двух кругов, ограниченных этими окружностями.

Ответ. $a^2(\sqrt{2}-1)[(2\sqrt{2}-1)\pi-4]/8$.

8. В треугольнике ABC биссектриса AK перпендикулярна медиане BM, а угол $\widehat{ABC}$ равен 120°. Найти отношение площади треугольника ABC к площади описанного около этого треугольника круга.

Ответ. $3\sqrt{13}(\sqrt{13}-1)/32\pi$.

9. В треугольнике ABC биссектриса AH делит медиану BE в отношении $BK : KE = 2$, а угол $\widehat{ACB}$ равен 30°. Найти отношение площади треугольника BCE к площади описанного около этого треугольника круга.

Ответ. $3/14\pi$.

10. В трапеции $ABCD$ диагонали AC и DB взаимно перпендикулярны, $\widehat{BAC} = \widehat{CDB}$. Продолжения боковых сторон AB и CD, пересекаясь в точке K, образуют угол $\widehat{AKD}$, равный 30°. Найти площадь треугольника AKD, если площадь трапеции равна S.

Ответ. $3S/2$.

11. Дана равнобочная трапеция, у которой верхнее основание вдвое меньше нижнего. Определить, в каком отношении делит нижнее основание трапеции прямая, которая параллельна диагонали, проходит ниже ее и отсекает треугольник площадью, в 4 раза меньшей площади трапеции.

Ответ. $4/\sqrt{6}-1$.

12. Дана трапеция $ABCD$, сторона AB которой перпендикулярна основаниям BC и AD. На стороне AB как на диаметре построена окружность радиуса $\sqrt{6}$, которая касается стороны CD. Другая окружность радиуса $\sqrt{2}$ касается сторон AD и CD и пересекается с

первой окружностью, имея с ней общую хорду длины $\sqrt{6}$. Центры обеих окружностей расположены по разные стороны от общей хорды. Найти площадь трапеции $ABCD$.

Ответ. $12\sqrt{2}/\sqrt[4]{3}(\sqrt{3}-1)$.

13. В параллелограмме $ABCD$ со сторонами $AD = 5$ и $AB = 4$ проведен отрезок EF, соединяющий точку E стороны BC с точкой F стороны CD. Точки E и F выбраны так, что $BE : EC = 1 : 2$, $CF : EF = 1 : 5$. Известно, что точка M пересечения диагонали AC с отрезком EF делит EF в отношении $MF : ME = 1 : 4$. Найти диагонали параллелограмма.

Ответ. $AC = \sqrt{45}$, $BD = \sqrt{37}$.

14. Трапеция $ABCD$ имеет основания $AD = 7$, $BC = 4$ и боковые стороны $AB = 5$, $CD = 4$. Окружность радиуса $\sqrt{2}$ с центром в точке B, лежащая в плоскости трапеции, пересекается со второй окружностью, центр которой лежит внутри трапеции $ABCD$ и которая проходит через точки A и D. Известно, что касательные, проведенные через одну из точек пересечения окружностей, взаимно перпендикулярны. Найти радиус второй окружности.

Ответ. $\sqrt{197}/4$.

15. Отрезок AB есть диаметр круга, а точка C лежит вне этого круга. Отрезки AC и BC пересекаются с окружностью в точках D и M, соответственно. Найти угол $\widehat{CBD}$, если площади треугольников DCM и ACB относятся как $1 : 4$.

Ответ. $\pi/6$.

16. В треугольнике ABC проведены биссектриса BD угла ABC и отрезок AM. Точки D и M лежат соответственно на AC и BC, K — точка пересечения BD и AM. Площади треугольников AKD и AMC относятся как $1 : 6$. Найти длину стороны AB, если $AB + BC = 3$ и $AB + MB = 2$.

Ответ. 1.

17. На отрезке AB длины R как на диаметре построена окружность. Вторая окружность такого же радиуса, что и первая, имеет центр в точке A. Третья окружность касается первой окружности внутренним образом, второй окружности —внешним образом, а также касается отрезка AB. Найти радиус третьей окружности.

Ответ. $R\sqrt{3}/8$.

18. Дан правильный треугольник ABC, сторона которого имеет длину a. Окружность проходит через центр треугольника и касается стороны BC в ее середине M. Прямая, проведенная из вершины A, касается окружности в точке E, так что $\widehat{BAE} < 30°$. Найти площадь треугольника AEM.

Ответ. $a^2\sqrt{6}/40$.

19. В треугольнике ABC известны длины сторон $AB = 6$, $BC = 4$, $AC = 8$. Биссектриса угла C пересекает сторону AB в точке D. Через точки A, D, C проведена окружность, пересекающая сторону BC в точке E. Найти площадь треугольника ADE.

Ответ. $3\sqrt{15}/2$.

20. В треугольнике ABC косинус угла $\widehat{ACB}$ равен $2/3$, $AC = 3$, $BC = 9$. Точка D лежит на стороне BC, так, что $CD = 3$. Найти отношение площади круга, описанного около треугольника ACD, к площади круга, вписанного в треугольник ABD.

Ответ. $9(11 + 4\sqrt{6})/50$.

21. В прямоугольном треугольнике ABC длины катетов равны 3 и 4. Из вершины C прямого угла проведена высота CD. Найти расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD.

Ответ. $\sqrt{2}$.

22. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C. Угол $\widehat{CAB}$ равен α. Биссектриса угла $\widehat{ABC}$ пересекает катет AC в точке K. На стороне BC как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу AB в точке M. Найти угол $\widehat{AMK}$.

Ответ. $\operatorname{arctg}(1/\cos\alpha)$.

23. Дан параллелограмм $ABCD$ со сторонами $AB = 2$ и $BC = 3$. Найти площадь этого параллелограмма, если известно, что диагональ AC перпендикулярна отрезку BE, соединяющему вершину B с серединой E стороны AD.

Ответ. $\sqrt{35}$.

24. Около окружности с радиусом r описана равнобочная трапеция $ABCD$. E и K — точки касания этой окружности с боковыми сторонами трапеции. Угол между основанием AB и боковой

стороной AD трапеции равен 60°. Доказать, что EK параллельна AB и найти площадь трапеции $ABEK$.

Ответ. $9\sqrt{3}\ r^2/4$.

25. В окружность с радиусом R вписан равнобедренный треугольник ABC с углом при вершине C, равным 120°. D — середина меньшей из дуг, соединяющих A и C, E — середина меньшей дуги из соединяющих C и B. Доказать, что DE параллельна AB, и найти площадь трапеции $ABED$.

Ответ. $R^2/2$.

26. В треугольнике ABC угол A равен 45°, а угол C — острый. Из середины стороны BC опущен перпендикуляр NM на сторону AC. Площади треугольников NMC и ABC относятся соответственно как 1 : 8. Найти углы треугольника ABC.

Ответ. 45°, 45°, 90°.

27. В трапеции $ABCD$ углы A и D при основании AD равны соответственно 60° и 90°. Точка N лежит на основании BC, причем $BN : BC = 2 : 3$. Точка M лежит на основании AD, прямая MN параллельна боковой стороне AB и делит площадь трапеции пополам. Найти отношение $AB : BC$.

Ответ. 4 : 3.

28. Три окружности расположены на плоскости так, что каждая из них касается двух других внешним образом. Две из них имеют радиус 3, а третья — радиус 1. Найти площадь треугольника ABC, где A, B и C — соответственно точки касания трех окружностей.

Ответ. $9\sqrt{7}/16$.

29. Даны углы $\widehat{ABC}$ и $\widehat{BCA}$ треугольника ($\widehat{ABC} \neq \widehat{BCA}$). Найти котангенс острого угла, который образует медиана, выходящая из вершины A, со стороной BC.

Ответ. $\left|\operatorname{ctg}\widehat{ABC} - \operatorname{ctg}\widehat{BCA}\right|/2$.

30. В треугольник ABC с заданными углами A и B из вершины A опущена высота AD. Точка P делит сторону AB пополам. Через точку P проведена окружность, касающаяся стороны BC в точке D. Определить радиус окружности, если длина стороны BC равна a.

Ответ. $a/4\sin^2 B[\operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg}(A + B)]$.

31. В параллелограмме со сторонами 2 и 4 проведена диагональ длиной 3. В каждый из получившихся треугольников вписано по окружности. Найти расстояние между центрами окружностей.

Ответ. $\sqrt{51}/3$.

32. Даны два одинаковых пересекающихся круга. Отношение расстояний между их центрами к радиусу равно $2m$. Третий круг касается внешним образом первых двух и их общей касательной. Определить отношение площади общей части первых двух кругов к площади третьего круга.

Ответ. $32(\arccos m - m\sqrt{1-m^2})/\pi m^4$.

33. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ заключены две окружности равного радиуса r, касающиеся друг друга внешним образом. Центр первой окружности находится на отрезке, соединяющем вершину A с серединой F стороны CD, а центр второй окружности находится на отрезке, соединяющем вершину C с серединой E стороны AB. Первая окружность касается сторон AB, AD и CD; вторая окружность касается сторон AB, BC и CD. Найти AC.

Ответ. $2\sqrt{5}$.

34. Точка E стороны BC и точка F стороны AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ расположены так, что $BE = 2 \cdot EC$ и $AF = 2 \cdot FD$. На отрезке AE находится центр окружности радиуса r, касающейся сторон AB, BC и CD. На отрезке BF находится центр окружности того же радиуса r, касающейся сторон AB, AD и CD. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, зная, что указанные окружности внешним образом касаются друг друга.

Ответ. $8r^2$.

35. В треугольнике ABC сторона BC служит основанием полукруга, площадь которого равна площади треугольника ABC. Угол $\widehat{BAC}$ равен α. Найти величины углов $\widehat{ABC}$ и $\widehat{BCA}$, считая, что $\widehat{ABC} \geq \widehat{BCA}$. Исследовать, при каких α задача имеет решение.

Ответ. $\widehat{ABC} = (\pi - \alpha)/2 + 1/2 \cdot \arccos(\pi/2 \cdot \sin\alpha - \cos\alpha)$;

$\widehat{BCA} = (\pi - \alpha)/2 - 1/2 \cdot \arccos(\pi/2 \cdot \sin\alpha - \cos\alpha)$;

$0 < \alpha \leq 2\arcsin(1/\sqrt{\pi^2/4 + 1})$.

36. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса R и описан вокруг другой окружности, которая касается сторон че-

тырехугольника в точках K, L, M и N. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если известно, что она в три раза больше площади четырехугольника $KLMN$, а угол между диагоналями AC и BD равен γ.

Ответ. $4R^2\sin\gamma/3$.

37. В четырехугольник $ABCD$ можно вписать и вокруг него можно описать окружность. Диагональ AC делит площадь четырехугольника пополам. Найти длину диагонали BD, если радиус вписанной окружности равен r, а периметр четырехугольника равен $2p$.

Ответ. $2rp/\sqrt{p^2-2rp}$.

38. Центры трех окружностей различных радиусов расположены на одной прямой, а центр четвертой находится на расстоянии d от этой прямой. Найти радиус четвертой окружности, если известно, что каждая из этих окружностей касается трех других.

Ответ. $d/2$.

39. В прямоугольном треугольнике ABC длина гипотенузы AB равна c, а угол при вершине A равен α. На продолжении гипотенузы AB через точку B взята точка M, а на продолжении катета AC через точку C взята точка N таким образом, что $BM = CM$. Найти длину общей хорды двух окружностей, описанных около треугольников ABC и AMN.

Ответ. $c\sin\alpha/2$.

40. В окружность вписана трапеция $ABCD$, причем $AD \parallel BC$ и $AD > BC$. На дуге $\overset{\smile}{AD}$, не содержащей вершин B и C, взята точка S. Точки P, Q, M и N являются основаниями перпендикуляров, опущенных из S соответственно на стороны AD, BC, AB и CD или на продолжения этих сторон. Известно, что $SP = a$, $SQ = b$, $SN = c$. Найти отношение площади треугольника MQS к площади треугольника NQS.

Ответ. ab/c^2.

41. В треугольнике ABC известно, что $AB = 20$, $AC = 24$. Известно также, что вершина C, центр вписанного в треугольник ABC круга и точка пересечения биссектрисы угла $\widehat{BAC}$ со стороной BC лежат на окружности, центр которой принадлежит отрезку AC. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Ответ. 12,5.

42. В прямоугольном секторе AOB из точки B как из центра проведена дуга $\overset{\smile}{OC}$ (C — точка пересечения этой дуги с дугой $\overset{\smile}{AB}$) радиуса BO. Окружность S_1 касается дуги $\overset{\smile}{AB}$, дуги $\overset{\smile}{OC}$ и прямой OA, а окружность S_2 касается дуги $\overset{\smile}{AB}$, прямой OA и окружности S_1. Найти отношение радиуса окружности S_1 к радиусу окружности S_2.

Ответ. $4(2+\sqrt{3})/3$.

43. В треугольнике ABC угол при вершине B равен $\pi/4$, а угол при вершине C — $\pi/3$. На медианах BM и CN, как на диаметрах, построены окружности, пересекающиеся в точках P и Q. Хорда PQ пересекает среднюю линию MN в точке F. Найти отношение длины отрезка NF к длине отрезка FM.

Ответ. $\sqrt{3}$.

44. В трапеции $ABCD$ точки K и M являются соответственно серединами оснований AB и CD, причем $AB=5$, $CD=3$. Найти площадь трапеции, если треугольник AMB — прямоугольный, а DK — высота трапеции.

Ответ. 8.

45. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла $\widehat{BCA}$ проведены биссектриса CL и медиана CM. Найти площадь треугольника ABC, если $LM=a$ и $CM=b$.

Ответ. $b^2(b^2-a^2)/(b^2+a^2)$.

46. В окружность с центром O вписана трапеция $ABCD$, в которой $BC \parallel AD$. В этой же окружности проведены диаметр CE и хорда BE, пересекающая AD в точке F. Точка H — основание перпендикуляра, опущенного из точки F на CE, S — середина отрезка EO, M — середина отрезка BD. Известно, что радиус окружности равен R, а $CH=9R/8$. Найти длину отрезка SM.

Ответ. $3\sqrt{2}\ R/4$.

47. Окружность радиуса 1 вписана в треугольник ABC, в котором косинус угла $\widehat{ABC}$ равен 0,8. Эта окружность касается средней линии треугольника ABC, параллельной стороне AC. Найти длину стороны AC.

Ответ. 3.

48. Два равных правильных треугольника ABC и CDE со стороной 1 расположены на плоскости так, что имеют только одну общую точку C, и угол $\widehat{BCD}$ меньше, чем $\pi/3$. Точка K — середина AC, точка L — середина CE, точка M —середина отрезка BD. Площадь треугольника KLM равна $\sqrt{3}/5$. Найти длину отрезка BD.

Ответ. $(2-\sqrt{3})/\sqrt{5}$.

49. Два равных равнобедренных треугольника ABC и DBE ($AB = BC = BD = BE$) имеют общую вершину B и лежат в одной плоскости так, что точки A и C находятся по разные стороны от прямой BD, а отрезки AC и DE пересекаются в точке K. Известно, что $\widehat{ABC} = \widehat{DBE} = \alpha < \pi/2$, $\widehat{AKD} = \beta < \alpha$. В каком отношении прямая BK делит угол $\widehat{ABC}$?

Ответ. $(\alpha-\beta)/(\alpha+\beta)$.

50. В треугольнике ABC известно, что $AB = AC$ и угол $\widehat{BAC}$ — тупой. Пусть точка D — это точка пересечения биссектрисы угла $\widehat{ABC}$ со стороной AC, M — основание перпендикуляра, опущенного из вершины A на сторону BC, E — основание перпендикуляра, опущенного из D на сторону BC. Через точку D проведен также перпендикуляр к BD до пересечения со стороной BC в точке F. Известно, что $ME = FC = a$. Найти площадь треугольника ABC.

Ответ. $25\sqrt{7}\,a^2/12$.

Глава II. СТЕРЕОМЕТРИЯ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ И ФОРМУЛЫ СТЕРЕОМЕТРИИ

Так же, как и в первом разделе этого пособия, напомним сначала наиболее употребительные теоремы и формулы, используемые при решении стереометрических задач.

Теоремы о параллельности прямых и плоскостей:

а) если прямая AB (рис. 103) параллельна какой-нибудь прямой CD, расположенной в плоскости P, то она параллельна самой плоскости;

б) если плоскость R (рис. 103) проходит через прямую AB, параллельную другой плоскости P, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения CD параллельна первой прямой AB;

в) если две параллельные плоскости P и Q (рис. 104) пересекаются третьей плоскостью R, то линии пересечения AB и CD параллельны;

г) если две пересекающиеся прямые AB и DC (рис. 105) одной плоскости соответственно параллельны двум прямым A_1B_1 и D_1C_1 другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

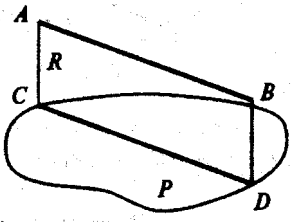


Рис. 103

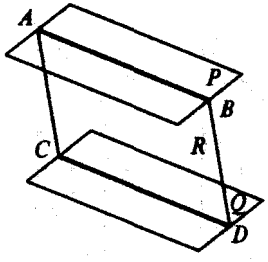


Рис. 104

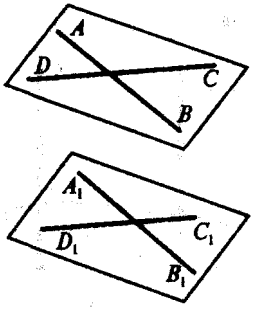


Рис. 105

Теоремы о перпендикулярности прямых и плоскостей:

а) для того чтобы прямая AB (рис. 106) была перпендикулярна плоскости P, необходимо и достаточно, чтобы она была перпендикулярна двум произвольным непараллельным прямым CD и EF, лежащим в этой плоскости;

б) для того, чтобы прямая DE (рис. 107) проведенная на плоскости P через основание наклонной AC была ей перпендикулярна, необходимо и достаточно, чтобы эта прямая была перпендикулярна к проекции BC, наклонной на плоскость P. (Достаточное условие этой теоремы называется «*Теоремой о трех перпендикулярах*»: AC, BC, DE.)

в) если две прямые AB и CD (рис. 108) перпендикулярны одной плоскости P, то они параллельны между собой;

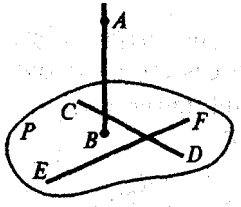


Рис. 106

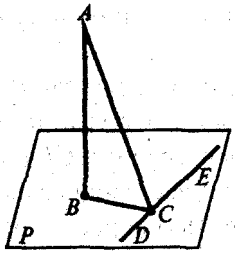


Рис. 107

г) если две плоскости P и Q (рис. 109) перпендикулярны одной прямой AB, то они параллельны друг другу.

Теоремы о перпендикулярности плоскостей:

а) если плоскость P проходит через перпендикуляр к другой плоскости Q, то плоскость P перпендикулярна плоскости Q (рис. 110);

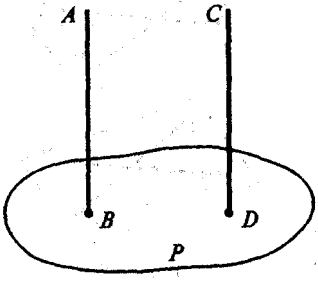


Рис. 108

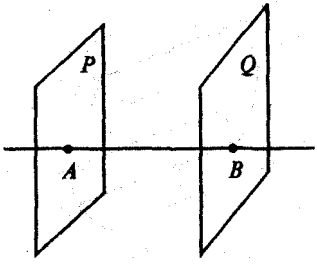


Рис. 109

б) если две плоскости P и Q (рис. 110) взаимно перпендикулярны, то прямая, проведенная в одной плоскости перпендикулярно линии пересечения плоскостей, перпендикулярна другой плоскости.

Теоремы о скрещивающихся прямых:

а) угол α между скрещивающимися прямыми AB и CD (рис. 111) определяется как угол между одной из этих прямых (например, CD) и любой прямой A_1B_1, проходящей через ее произвольную точку E параллельно другой прямой;

б) расстояние h между скрещивающимися прямыми AB и CD (рис. 111) определяется как кратчайшее расстояние между точками этих прямых и может быть найдено как расстояние от одной из этих прямых (например, AB) до плоскости P, проходящей через другую прямую CD параллельно первой.

Двугранные углы

Определения. Пересечение двух полупространств, границами которых служат непараллельные плоскости P и Q (рис. 112) называется двугранным углом.

Ограничивающие двугранный угол плоскости P и Q называются его гранями, а прямая AB, являющаяся общей границей этих плоскостей — ребром двугранного угла.

Пересечение двугранного угла и плоскости S, перпендикулярной к его ребру, называется линейным углом двугранного угла (рис. 113). Величиной φ двугранного угла называется величина его линейного угла, т.е. величина угла между прямыми CD и CE, перпендикулярными ребру AB двугранного угла.

Величину меньшего из двугранных углов, определяемых двумя пересекающимися плоскостями, называют углом между этими плос-

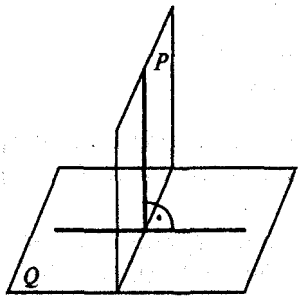


Рис. 110

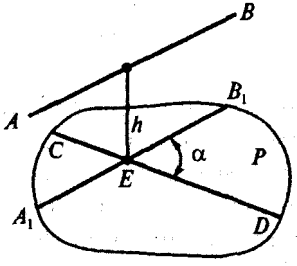


Рис. 111

Основные геометрические места точек в пространстве

а) геометрическим местом точек, удаленных на расстояние R от данной точки O, является сфера радиуса R с центром в этой точке;

б) геометрическим местом точек, равноудаленных от двух данных точек пространства A и B (рис. 115), является плоскость P, перпендикулярная к отрезку прямой, соединяющему эти точки, и проходящая через его середину;

в) геометрическим местом точек, равноудаленных от трех данных точек A, B и C (рис. 116) пространства, не лежащих на одной прямой, является прямая MN, перпендикулярная плоскости P, в которой лежат эти точки, и проходящие через центр окружности, проведенной через эти точки;

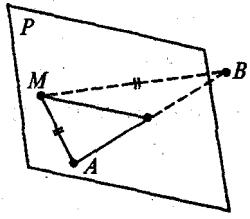


Рис. 115

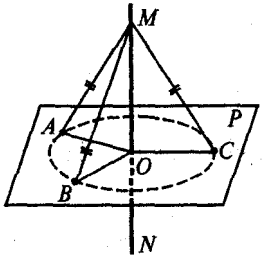


Рис. 116

г) геометрическим местом точек, равноудаленных от граней двугранного угла, является так называемая «*биссекторная плоскость*» P (рис. 117), проходящая через ребро AB двугранного угла и пересекающая любой линейный угол двугранного угла CAD по биссектрисе l.

Векторы

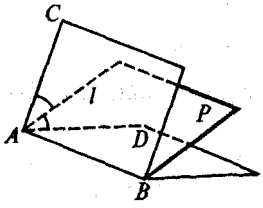


Рис. 117

Векторы в трехмерном пространстве вводятся аналогично тому, как это было сделано для плоскости (см. I, § I). Остаются справедливыми и все свойства векторов, а также правила действий с ними.

Если $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — попарно перпендикулярные единичные векторы, так называемый *ортонормированный базис*, то любой вектор $\vec{a}$

пространства может быть единственным образом разложен по этим векторам, т.е. представлен в виде

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}.$$

Числа $\{a_1.a_2, a_3\}$ называются декартовыми координатами вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Декартовы координаты вектора являются проекциями этого вектора на соответственные оси системы координат:

$$a_1 = np_x\vec{a}\ ;\ a_2 = np_y\vec{a}\ ;\ a_3 = np_z\vec{a}\ .$$

Если все числа $a_1.a_2,a_3$ отличны от нуля, то $\vec{a}$ можно изобразить с помощью диагонали прямоугольного параллелепипеда, у которого длины ребер равны $|a_1|$, $|a_2|$ и $|a_3|$ (рис. 118).

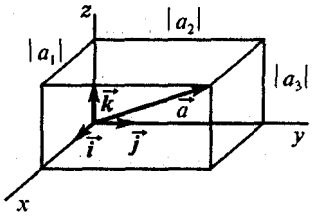


Рис. 118

Если вектор $\vec{a}$ отложен от точки A с координатами (x_1, y_1, z_1) и кончается в точке B с координатами (x_2, y_2, z_2), то координаты вектора определяются через координаты начала и конца вектора по формулам:

$$a_1 = x_2 - x_1;\ a_2 = y_2 - y_1;\ a_3 = z_2 - z_1;\ \text{т.е.}$$

$$\overline{AB}\,\{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\}.$$

Если $\vec{a}\,\{a_1, a_2, a_3\}$ и $\vec{b}\,\{b_1, b_2, b_3\}$ —два произвольных вектора, то:

а) координаты суммы векторов равны сумме соответствующих координат слагаемых

$$\vec{a} + \vec{b} = \{a_1 + b_1;\ a_2 + b_2;\ a_3 + b_3\};$$

б) координаты разности векторов равны разности соответствующих координат этих векторов

$$\vec{a} - \vec{b} = \{a_1 - b_1;\ a_2 - b_2;\ a_3 - b_3\};$$

в) координаты произведения вектора на число λ равны произведению соответствующих координат вектора на данное число

$$\lambda\vec{a} = \{\lambda a_1;\ \lambda a_2;\ \lambda a_3\};$$

г) линейной комбинации $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, где λ и μ — произвольные числа, соответствуют координаты

$$\vec{c} = \{\lambda a_1 + \mu b_1;\ \lambda a_2 + \mu b_2;\ \lambda a_3 + \mu b_3\}.$$

Скалярное произведение векторов определяется как

$$(\vec{a}\cdot\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi, \text{ где } \varphi = \widehat{(\vec{a}\cdot\vec{b})}.$$

Величина скалярного произведения определяется через координаты векторов по формуле

$$(\vec{a}\cdot\vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Длина вектора $\vec{a}$ с координатами $\{a_1, a_2, a_3\}$ дается формулой

$$\vec{a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется из равенства

$$\cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Всякое линейное уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

связывающее координаты x, y, z, определяет множество точек пространства, лежащих на плоскости, и, наоборот, каждую плоскость можно задать линейным уравнением с тремя переменными, имеющим по крайней мере один ненулевой коэффициент при переменных.

Вектор $\vec{n}$ с координатами $\{A, B, C\}$ перпендикулярен плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

Доказательство. Действительно, если $M_0(x_0, y_0, z_0)$ какая-либо точка плоскости, то $Ax_0 + by_0 + Cz_0 + D = 0$. Отсюда следует, что уравнение данной плоскости можно переписать в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

или как скалярное произведение

$$(\vec{n}\cdot\overrightarrow{MM_0}) = 0$$

векторов $\vec{n} = \{A, B, C\}$ и $\overrightarrow{MM_0} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$, где $M(x, y, z)$ — произвольная точка данной плоскости. Поскольку $\vec{n} \neq 0$, то равенство нулю скалярного произведения означает перпендикулярность перемножаемых векторов, т.е. $\vec{n} \perp \overrightarrow{MM_0}$. С

другой стороны, известно, что если прямая перпендикулярна хотя бы двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна самой плоскости.

Таким образом, *коэффициенты A, B, C при переменных x, y, z в уравнении плоскости можно рассматривать как координаты вектора, перпендикулярного данной плоскости.*

Угол φ между двумя плоскостями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ находится как угол между перпендикулярными им векторами $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$, т.е. по формуле

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Расстояние h от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ дается формулой

$$h = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Площадь ортогональной проекции многоугольника

Площадь $S_{пр}$ ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна площади $S_ф$ проектируемого многоугольника, умноженной на косинус угла φ между плоскостями многоугольника и его проекции (рис. 119):

$$S_{пр} = S_ф \cdot \cos\varphi.$$

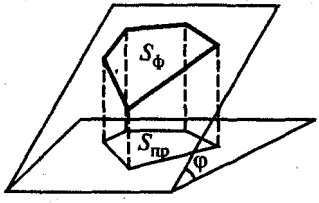


Рис. 119

Многогранники

Многогранником называется объединение замкнутой многогранной поверхности и ее внутренней области.

Призмой называется многогранник, две грани которого n — угольники, лежащие в параллельных плоскостях, а остальные n граней — параллелограммы (рис. 120).

Площадь $S_{бок}$ боковой поверхности призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения на боковое ребро (рис. 120):

$$S_{бок} = P_\perp \cdot b,$$

где $P_{\perp}$ — периметр многоугольника $A_2B_2C_2D_2E_2$, а b — длина бокового ребра.

Объем призмы равен произведению площади основания $S_{осн}$ на высоту H призмы:

$$V = S_{осн} \cdot H.$$

Для *прямой призмы* (т.е. призмы, у которой боковые ребра перпендикулярны плоскостям оснований), площадь боковой поверхности и объем даются формулами

$$S_{бок} = P_{осн} \cdot H;$$

$$V = S_{осн} \cdot H,$$

в которых $P_{осн}$, $S_{осн}$ и H — периметр, площадь основания и высота призмы, соответственно.

Параллелепипедом называется призма, основанием которой служит параллелограмм (рис. 121). Середина диагоналей параллелепипеда является его центром симметрии.

Прямой параллелепипед, основанием которого служит прямоугольник, называется *прямоугольным параллелепипедом* (рис. 121).

Квадрат длины диагоналей прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений, т.е.

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

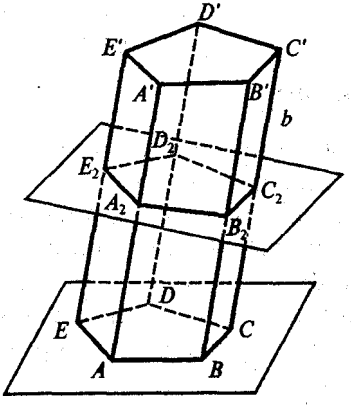


Рис. 120

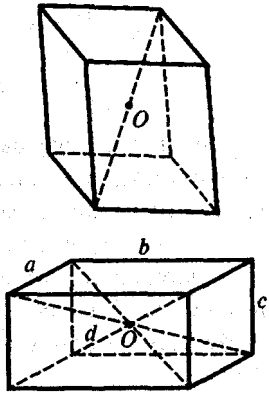


Рис. 121

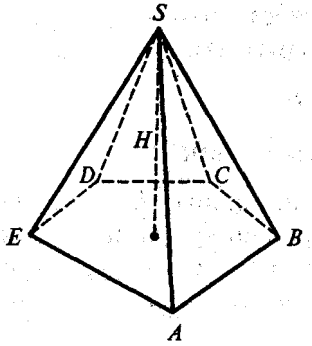


Рис. 122

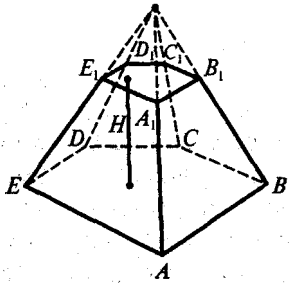


Рис. 123

Пирамидой называется многогранник, одна из граней которого — произвольный многоугольник, а остальные грани — треугольники, имеющие общую вершину (рис. 122).

Объем пирамиды дается формулой

$$V = 1/3\, S_{\text{осн}} \cdot H,$$

где $S_{\text{осн}}$ — площадь основания пирамиды, H — высота.

Объем *усеченной пирамиды* (т.е. многогранника, вершинами которого служат вершины основания пирамиды $ABCDE$ и вершины ее сечения $A_1B_1C_1D_1E_1$ плоскостью, параллельной основанию) (рис. 123), дается формулой

$$V = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}) \cdot H,$$

в которой $S_1 S_2$ — площади оснований, H — высота усеченной пирамиды.

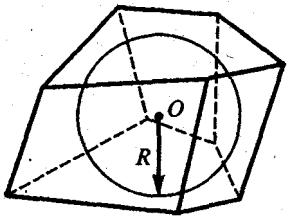


Рис. 124

Объем произвольного многогранника, в который можно вписать шар радиуса R (рис. 124), связан с площадью $S_п$ его поверхности формулой

$$V = 1/3 S_п \cdot R.$$

Круглые тела

Круглые тела — это тела, ограниченные поверхностями вращения.

Цилиндром прямым, круговым называется фигура, полученная при вращении прямоугольника $ABCD$ вокруг оси, содержащей его сторону AB (рис. 125).

Площадь $S_{бок}$ боковой поверхности цилиндра и $S_ц$ — его полной поверхности даются соответственно формулами:

$$S_{бок} = 2\pi RH;$$

$$S_ц = S_{бок} + 2S_{осн} = 2\pi RH + 2\pi R^2,$$

в которых R — радиус основания цилиндра, H — его высота, $S_{осн}$ — площадь основания. Объем $V_ц$ цилиндра равен $V_ц = \pi R^2 H$.

Конусом (прямым, круговым) называется фигура, полученная при вращении прямоугольного треугольника ABC вокруг оси, содержащей его катет AB (рис. 126).

Площадь $S_{бок}$ боковой поверхности конуса и $S_{кон}$ — его полной поверхности даются соответственно формулами

$$S_{бок} = \pi RL,$$

$$S_{кон} = S_{бок} + S_{осн} = \pi RL + \pi R^2,$$

в которых R — радиус основания конуса, L — длина его образующей, $S_{осн}$ — площадь основания.

Объем $V_{кон}$ конуса равен

$$V_{кон} = 1/3 S_{осн} \cdot H,$$

где H — высота конуса.

Площадь $S_{у,\ бок}$ боковой поверхности и объем $V_{у,\ бок}$ усеченного конуса (рис. 127) определяются формулами:

$$S_{у,\ бок} = \pi(R_1 + R_2)L;$$

$$V_{у,бок} = 1/3(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}) \cdot H,$$

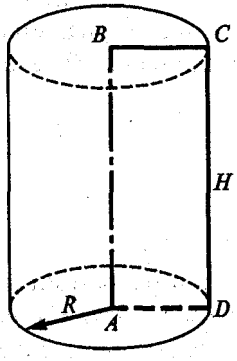


Рис. 125

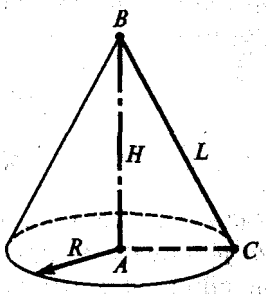


Рис. 126

в которых R_1 и R_2 — радиусы оснований усеченного конуса; $S_1 = \pi R_1^2$. $S_2 = \pi R_2^2$ — площади его оснований, L — длина образующей, H – высота.

Шаром называется фигура, полученная при вращении полукруга вокруг оси, содержащей его диаметр AD (рис. 128).

Сфера — это поверхность шара, геометрическое место точек, удаленных от некоторой точки пространства (центра шара) на заданное расстояние R (R — радиус сферы, шара).

Касательной плоскостью к сфере (шару) называется плоскость, имеющая со сферой единственную общую точку (рис. 128). Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной плоскости.

Касательной прямой к сфере (шару) называется прямая, имеющая со сферой единственную общую точку (рис. 128).

Если из точки M, лежащей вне сферы, проведены к сфере две касательные (рис. 128), то отрезки MB и MC этих касательных, заключенные между точкой M и точками касания B и C, имеют одинаковую длину ($MB = MC$).

Площадь S поверхности шара и его объем V определяются формулами:

$$S = 4\pi R^2, \quad V = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

где R — радиус шара.

Сегментной поверхностью (рис. 129) называется часть шаровой поверхности, отсекаемая от нее какой-нибудь плоскостью P. Отрезок MK радиуса, перпендикулярного плоскости сечения, называется высотой сегментной поверхности.

Шаровым сегментом (рис. 129) называется часть шара, отсекаемая от него какой-нибудь плоскостью P.

Площадь $S_{сег}$ сегментной поверхности и объем $V_{сег}$ шарового сегмента определяются формулами:

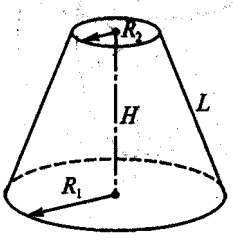


Рис. 127

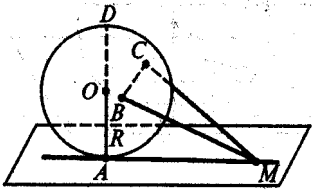


Рис. 128

$$S_{сег} = 2\pi RH;\ V_{сег} = \pi H^2(R - \frac{1}{3} \cdot H),$$

где R — радиус шара, $H = MK$ — высота сегмента.

Шаровым поясом (рис. 129) называется часть шаровой поверхности, заключенная между двумя параллельными секущими плоскостями P и Q. Расстояние H между этими плоскостями называется высотой шарового пояса.

Шаровым слоем (рис. 129) называется часть шара, заключенная между двумя параллельными секущими плоскостями P и Q.

Площадь поверхности $S_{ш.п.}$ шарового пояса определяется формулой

$$S_{ш.п.} = 2\pi RH,$$

в которой Н — высота шарового пояса (рис. 130).

Объем шарового слоя находится как разность объемов двух шаровых сегментов.

Шаровым сектором (рис. 130) называется фигура, полученная при вращении кругового сектора COD вокруг диаметра AB, не пересекающего ограничивающую его дугу.

Объем $V_{ш.сек.}$ шарового сектора определяется формулой

$$V_{ш.сек.} = \frac{1}{3} S_{ш.п.} R = \frac{2}{3}\ \pi R^2 H,$$

где H — высота соответствующего шарового пояса.

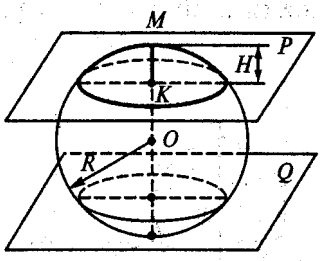


Рис. 129

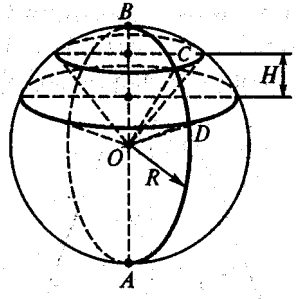


Рис. 130

ЗАДАЧИ

1. Дана прямая, параллельная плоскости. Параллельна ли эта прямая любой прямой, лежащей в плоскости? Может ли эта прямая пересечь хотя бы одну из таких прямых?

Ответ: Нет. Нет.

2. Найти угол между двумя скрещивающимися прямыми, одна из которых содержит диагональ куба, а другая — диагональ боковой грани.

Ответ: 90°.

3. Найти угол между двумя скрещивающимися прямыми, содержащими диагонали граней куба.

Ответ: 60°.

4. Доказать, что если угол AOB спроектировать ортогонально на плоскость, параллельную его биссектрисе OC, то биссектриса проекции угла AOB будет параллельна OC.

5. Доказать, что биссекторные плоскости трех внутренних двугранных углов трехгранного угла проходят через одну прямую.

6. На двух скрещивающихся прямых l и l_1 лежат отрезки AB и CD. Доказать, что объем тетраэдра $ABCD$ не меняется, если отрезки AB и CD произвольно перемещать по данным прямым.

Ответ: Объем указанного тетраэдра равен $1/6 \cdot abh \sin\alpha$, где $a = AB$, $b = CD$, α — величина угла между скрещивающимися прямыми, а h — кратчайшее расстояние между ними; отсюда следует сформулированное утверждение.

7. **Теорема.** *Если ребро SA произвольной треугольной пирамиды $SABC$ (S — вершина) изменить в k раз, ребро SB — в m раз, ребро SC — в n раз, т.е. перейти к пирамиде $SA_1B_1C_1$ такой, что*

$$SA_1 = k \cdot SA;\ SB_1 = m \cdot SB;\ SC_1 = n \cdot SC,$$

то объем пирамиды изменится в kmn раз, т.е.

$$V_{SA_1B_1C_1} = kmn \cdot V_{SABC}.$$

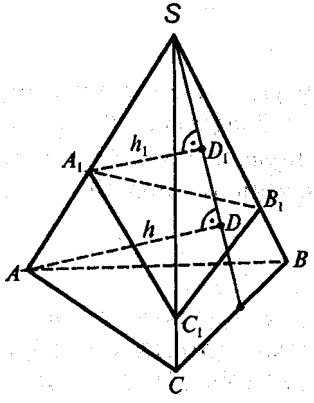


Рис. 131

Числа k, m, n могут быть меньше или больше единицы (рис. 131).

Доказательство. Представим объем каждой из пирамид по формулам:

$$V_{SA_1B_1C_1} = \frac{1}{3} S_{SB_1C_1} \cdot h_1,$$

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{SBC} \cdot h,$$

где h_1 и h — длины высот каждой из пирамид, опущенных на боковые грани из вершин A_1 и A, соответственно (рис. 131). Составляя отношение объемов пирамид, находим

$$\frac{V_{SA_1B_1C_1}}{V_{SABC}} = \frac{S_{SB_1C_1}}{S_{SBC}} \cdot \frac{h_1}{h}.$$

Очевидно, что отношение площадей треугольников SB_1C_1 и SBC равно

$$\frac{S_{SB_1C_1}}{S_{SBC}} = \frac{1/2 \cdot SB_1 \cdot SC_1 \cdot \sin\alpha}{1/2 \cdot SB \cdot SC \cdot \sin\alpha} = \frac{SB_1 \cdot SC_1}{SB \cdot SC} = mn,$$

поскольку эти треугольники имеют общий угол α при вершине S.

Отношение высот $h_1 : h$ равно k. Это следует из рассмотрения подобных треугольников A_1D_1S и ADS.

Таким образом,

$$\frac{V_{SA_1B_1C_1}}{V_{SABC}} = kmn$$

и утверждение доказано.

Следствие. Если $k = m = n = k_0$, то пирамида $SA_1B_1C_1$ подобна пирамиде $SABC$ и объемы этих пирамид относятся как куб коэффициента подобия, т.е.

$$V_{SA_1B_1C_1} : V_{SABC} = k_0^3.$$

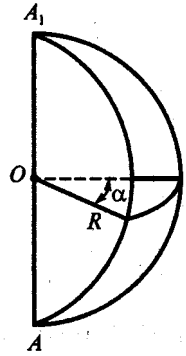
8. На продолжении ребра SA пирамиды $SABC$ отложена точка M такая, что $AM = 5 \cdot SA$, а на ребрах SB и SC —точки N и Q такие, что $SN = 1/3 \cdot SB$ и $SC = QC$. Найти объем пирамиды $SMNQ$, если объем пирамиды $SABC$ равен V.

Ответ: $4V$ (см. решение предыдущей задачи).

9. Доказать, что объемы цилиндра, конуса, усеченного конуса, шарового сегмента и шарового слоя можно вычислить по формуле

$$V=\frac{H}{6}\ (S_1+S_2+4S_0),$$

в которой H — высота тела, S_1 и S_2 — площади его оснований (для конуса и шарового сегмента одна из этих площадей равна нулю), а S_0 — площадь сечения тела плоскостью, параллельной основаниям и проходящей через середину высоты.



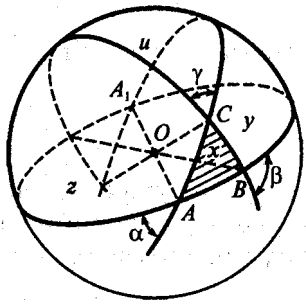


Рис. 132

10. **Задача.** *Найти площадь сферического треугольника, углы которого равны* α, β *и* γ, *который расположен на сфере радиуса* R (рис. 132).

Решение. *Определение.* Сферическим треугольником называется часть сферы, ограниченная дугами трех ее больших кругов. Углом ABC сферического треугольника называется линейный угол двугранного угла, образуемого плоскостями больших кругов сферы, высекающими на ней данный угол сферического треугольника (рис. 132).

Заметим сначала, что площадь части сферы, высекаемой из нее гранями двугранного угла величиной α, ребром которого является диаметр сферы, равна $\alpha S/2\pi$, где S — площадь поверхности сферы.

Пусть теперь ABC — произвольный сферический треугольник. Так как его стороны — дуги больших кругов, то, проводя, например, через сторону $\overset{\smile}{AB}$ плоскость, заключаем, что она пройдет через центр сферы, а сферический треугольник ABC окажется расположенным на одной из полусфер, на которые данная сфера разделится проведенной плоскостью (рис. 132). Дугами $\overset{\smile}{AC}$ и $\overset{\smile}{BC}$, продолженными за точку C, полусфера разделится на 4 части, площади которых обозначим через x, y, z и u (x — искомая площадь). Можно написать следующие уравнения:

$$x + y = \frac{\alpha}{2\pi} S = 2\alpha R^2;$$

$$x + z = \frac{\beta}{2\pi} S = 2\beta R^2;$$

$$x + u = \frac{\gamma}{2\pi} S = 2\gamma R^2.$$

Кроме того,

$$x + y + z + u = 2\pi R^2.$$

Решая составленную систему уравнений, находим

$$x = (\alpha + \beta + \gamma - \pi) \cdot R^2.$$

Отсюда следует, что

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{x}{R^2},$$

т.е. сумма углов сферического треугольника больше π (180°) на величину, равную отношению площади этого треугольника к квадрату радиуса сферы, на которой расположен этот треугольник.

§ 2. РЕШЕНИЕ ПРАВИЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНЫХ И ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНЫХ ПИРАМИД

Так же, как и в первом разделе пособия, рассмотрим сначала геометрические фигуры частного вида — правильные пирамиды и в первую очередь правильные треугольные и четырехугольные пирамиды.

Пирамида называется *правильной*, если ее основанием является правильный многоугольник, а вершина проектируется в центр основания.

Правильная пирамида может быть задана двумя параметрами. В качестве таких параметров можно взять сторону основания и высоту пирамиды; сторону основания и длину бокового ребра пирамиды; или длину бокового ребра пирамиды и величину плоского угла при ее вершине и т.д.

Под *«решением правильных пирамид»* будем понимать расчет одних, неизвестных, элементов пирамида через другие, известные.

Рассмотрим сначала **правильную треугольную пирамиду** (рис. 133). По определению — это такая пирамида, в основании которой лежит правильный треугольник ABC, а вершина S проектируется в его центр, точку O.

На рис. 133 показаны основные элементы правильной треугольной пирамиды:

a — длина стороны основания пирамиды ($a = AB = BC = CA$);

b — длина бокового ребра пирамиды ($b = AS = BS = CS$);

H — высота пирамиды; h — апофема боковой грани пирамиды (например, $h = SE$);

α — величина угла между боковым ребром пирамиды и плоскостью ее основания, определяемого как угол между боковым ребром и его проекцией на плоскость основания ($0 < \alpha < \pi/2$);

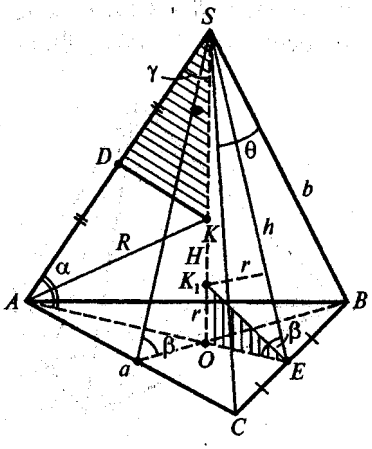


Рис. 133

β — величина угла между плоскостью боковой грани и плоскостью основания. Поскольку $SE \perp BC$ и $AE \perp BC$ (E — середина BC), то угол AES есть линейный угол двугранного угла между рассматриваемыми плоскостями ($0 < \beta < \pi/2$);

γ — величина угла между боковыми ребром пирамиды и ее высотой ($0 < \gamma < \pi/2$);

θ — величина плоского угла при вершине пирамиды ($0 < \theta < 2\pi/3$).

Длина отрезка AO находится как 2/3 высоты основания правильной пирамиды, а OE — как 1/3 этой высоты, т.е.

$$AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}; \quad OE = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Кроме того, справедливы следующие соотношения между основными элементами пирамиды:

$$b^2 = H^2 + \frac{a^2}{3}; \quad h^2 = H^2 + \frac{a^2}{12}; \quad \alpha + \gamma = \frac{\pi}{2};$$

$$H = b\cos\gamma; \quad \frac{a\sqrt{3}}{3} = b\sin\gamma = b\cos\alpha;$$

$$H = h\sin\beta; \quad \frac{a\sqrt{3}}{3} = h\cos\beta; \quad a = 2b\sin\frac{\theta}{2}.$$

Двугранный угол φ между боковыми гранями пирамиды находится следующим образом. Из двух вершин основания пирамиды (например, B и C) опускаются перпендикуляры BF и CF на боковое ребро AS. В силу равенства треугольников ABS и ACS эти перпендикуляры, естественно, попадают в одну и ту же точку F, лежащую на ребре AS пирамиды, поэтому получившийся угол BFC есть линейный угол двугранного угла между боковыми гранями пирамиды (рис. 134).

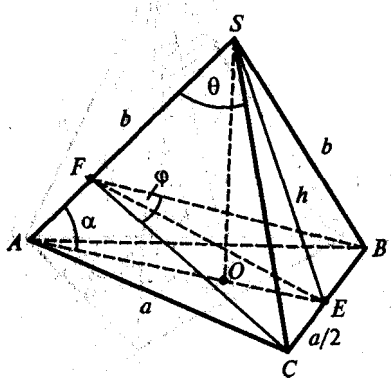


Рис. 134

Из равнобедренного треугольника BFC по теореме косинусов находим:

$$a^2 = 2 \cdot CF^2 - 2 \cdot CF^2 \cos\varphi$$

или

$$\cos\varphi = \frac{2CF^2 - a^2}{2CF^2}.$$

Этот же угол можно найти и по-другому. Из прямоугольного треугольника CEF следует, что

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{a/2}{CF}.$$

Высота CF боковой грани ACS находится из уравнения $b \cdot CF = ah$. Следовательно:

$$CF = \frac{ah}{b}, \quad \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{b}{2h}.$$

Плоскости ASE и BSD, проходящие через высоту пирамиды и, следовательно, перпендикулярные плоскости основания, играют важную роль при решении многих задач, связанных с правильной треугольной пирамидой. Каждая из этих плоскостей делит соответствующий двугранный угол между боковыми гранями пирамиды пополам, т.е. служит биссекторной плоскостью такого угла.

Полезно отметить, что в правильной треугольной пирамиде скрещивающиеся ребра взаимно перпендикулярны $AS \perp BC$, $BS \perp AC$, $CS \perp AB$ (это следует из теоремы о трех перпендикулярах), а длина отрезка EF дает кратчайшее расстояние между этими ребрами (рис. 134):

$$EF = \frac{a\sqrt{3}}{2}\sin\alpha.$$

Вокруг всякой треугольной пирамиды можно описать сферу. В правильной пирамиде центр K этой сферы лежит на высоте пирамиды или на ее продолжении за точку O, ведь прямая SO, содержащая высоту пирамиды, есть геометрическое место точек, равноудаленных от вершин основания пирамиды.

Радиус R описанной сферы удобно находить из равнобедренного треугольника AKS (рис. 133):

$$R\cos\gamma = \frac{b}{2} \quad \text{или} \quad R = \frac{b}{2\cos\gamma}, \ (SK=R;\ AS=b)$$

а) Если $R < H$, т.е. $\alpha > \pi/4$, центр описанной сферы лежит внутри пирамиды;

б) если $R = H$, т.е. $\alpha = \pi/4$, центр описанной сферы лежит на основании пирамиды, в его центре;

в) если $R > H$, т.е. $\alpha < \pi/4$, центр описанной сферы находится вне пирамиды.

Во всякую треугольную пирамиду можно вписать шар. В правильной пирамиде центр K_1 вписанного шара находится на высоте пирамиды в точке ее пересечения с биссектрисой угла AES (рис. 133). Действительно, центр вписанного шара должен быть равноудален от всех граней пирамиды, т.е. должен принадлежать пересечению биссекторных плоскостей всех внутренних двугранных углов пирамиды.

Радиус r вписанного шара удобно находить из прямоугольного треугольника EK_1O:

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}, \quad \left(\sin\beta = \frac{H}{h}, \ \cos\beta = \frac{a\sqrt{3}}{6h}\right).$$

Рассмотрим теперь несколько типовых задач на решение правильных треугольных пирамид.

Задача 1. *Правильная треугольная пирамида SABC* (рис. 133) *задана двумя элементами: длиной a сторон основания и длиной H ее высоты. Вычислить все остальные элементы пирамиды:* α, β, γ, θ, φ, b, R, r и V.

Решение. Вычисляем: 1) угол α наклона боковых ребер пирамиды к плоскости ее основания и длину b бокового ребра из ΔAOS:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{SO}{AO} = \frac{H}{a\sqrt{3}/3} = \frac{H\sqrt{3}}{a}, \quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{H\sqrt{3}}{a};$$

$$b = \sqrt{AO^2 + SO^2} = \sqrt{a^2/3 + H^2};$$

2) угол β наклона боковых граней пирамиды к плоскости ее основания и длину h апофемы боковой грани — из ΔEOS:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{SO}{EO} = \frac{H}{a\sqrt{3}/6} = \frac{2H\sqrt{3}}{a}, \quad \beta = \operatorname{arctg}\frac{2H\sqrt{3}}{a};$$

$$h = \sqrt{EO^2 + SO^2} = \sqrt{a^2/12 + H^2};$$

3) угол θ при вершине S пирамиды — из ΔBCS:

$$a^2 = 2b^2 - 2b^2\cos\theta,$$

откуда

$$\cos\theta = \frac{6H^2 - a^2}{6H^2 + 2a^2};$$

4) угол φ между боковыми гранями — из ΔCEF, (рис. 134):

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{CE}{CF} = \frac{a}{2CF},$$

Так как $b \cdot CF = ah$, то $CF = a\sqrt{H^2 + a^2/12} \,/\, \sqrt{H^2 + a^2/3}$, откуда

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{3H^2 + a^2}{12H^2 + a^2}};$$

5) объем V пирамиды по формуле

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{a^2 H\sqrt{3}}{12};$$

6) радиус R описанного вокруг пирамиды шара — из ΔDKS:

$$R\cos\gamma = \frac{b}{2}, \quad R = \frac{b}{2\cos\gamma}.$$

Поскольку $\cos\gamma = OS/AS = H/b$, то $R = b^2/2H$, следовательно:

$$R = \frac{3H^2 + a^2}{6H};$$

7) радиус r вписанного в пирамиду шара — из ΔEK_1O:

$$\frac{r}{OE} = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}, \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2},$$

где $\beta = \operatorname{arctg}\,(2H\sqrt{3}/a)$. Радиус r можно найти также по объему V пирамиды и площади ее полной поверхности S по формуле $r = 3V/S$.

Задача 2. *В правильной треугольной пирамиде известны: b — длина бокового ребра и φ — двугранный угол между ее боковыми гранями. Вычислить сторону основания a и высоту H пирамиды.*

Решение. Известно, что плоские углы θ_1, θ_2 и θ_3 при вершине произвольного трехгранного угла определяют двугранные углы этого же трехгранного угла по формулам

$$\cos\varphi = \frac{\cos\theta_1 - \cos\theta_2\cos\theta_3}{\sin\theta_2\sin\theta_3},$$

в которой φ — двугранный угол между гранями с углами θ_2 и θ_3 (см. гл. 2, § 1). В данном случае $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta$, поэтому

$$\cos\varphi = \frac{\cos\theta - \cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\cos\theta(1-\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$$

или

$$\cos\varphi = \frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}.$$

Отсюда находим:

$$\cos\theta = \frac{\cos\varphi}{1-\cos\varphi}.$$

Поскольку для правильной треугольной пирамиды $\pi/3 < \varphi < \pi$, то $|\cos\varphi/(1-\cos\varphi)| < 1$, и полученная формула всегда позволяет определить угол θ при вершине пирамиды.

Зная $\cos\theta$, нетрудно вычислить искомые величины a и H:

1) $a/2 = b\sin\theta/2$, $\quad a = 2b\sin\theta/2 = b\sqrt{2(1-\cos\theta)}$;

2) $H = \sqrt{b^2 - a^2/3}$, $\quad H = b\sqrt{1 - 2/3(1-\cos\theta)}$.

Задача 3. *Известны длина a стороны основания правильной треугольной пирамиды и радиус r вписанного в нее шара. Вычислить высоту H пирамиды.*

Решение. Прежде всего, из ΔEK_1O (рис. 133) вычислим угол β наклона боковой грани пирамиды к плоскости ее основания

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{r}{OE} = \frac{r}{a\sqrt{3}/6} = \frac{2r\sqrt{3}}{a}.$$

После этого вычисляем H из ΔESO:

$$H = OE\cdot\operatorname{tg}\beta = \frac{a\sqrt{3}}{6}\operatorname{tg}\beta$$

или

$$H = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{2\operatorname{tg}\beta/2}{1-\operatorname{tg}^2\beta/2} = \frac{2a^2 r}{a^2 - 12r^2}.$$

Если в правильной треугольной пирамиде длина бокового ребра равна длине стороны основания ($a = b$), то правильная пирамида представляет собой *правильный тетраэдр*.

На рис. 135 изображен правильный тетраэдр. Эта фигура обладает всеми свойствами правильной треугольной пирамиды. Кроме того, полезно знать и дополнительные ее свойства:

1) правильный тетраэдр имеет центр, точку K. В этом центре пересекаются все высоты тетраэдра, отрезки, соединяющие середины скрещивающихся ребер (бимедианы тетраэдра), а также в нем находятся центры вписанной и описанной вокруг пирамиды сфер (шаров);

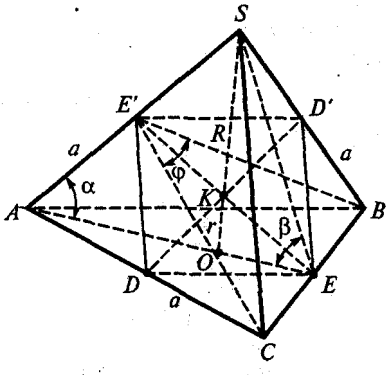


Рис. 135

2) центр K правильного тетраэдра делит каждую высоту тетраэдра в отношении 3 : 1, считая от вершины $SK : KO = 3 : 1$;

3) радиус описанного шара составляет 3/4 высоты тетраэдра, а радиус вписанного шара — 1/4 его высоты:

$$R = \frac{3}{4}H, \qquad r = \frac{1}{4}H;$$

4) сечения правильного тетраэдра, параллельные скрещивающимся ребрам, представляют собой прямоугольники, а то из них, которое проходит через середину ребра, — квадрат ($DE'D'E$).

Задача 4. *Пусть сторона правильного тетраэдра равна* a. *Проверить справедливость следующих формул:*

высота H тетраэдра: $H = a\sqrt{2/3}$;

угол α между ребром и плоскостью основания: $\alpha = \arcsin\sqrt{2/3}$;

углы $\beta = \varphi$ между боковыми гранями: $\beta = \arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}$;

радиус r вписанного шара: $r = \frac{1}{4} \cdot a\sqrt{2/3}$;

радиус R описанного шара: $R = \frac{3}{4} \cdot a\sqrt{2/3}$.

Решение. Высота H тетраэдра находится из ΔAOS (рис. 135):

$$H = \sqrt{AS^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Отсюда находятся r и R:

$$r = \frac{1}{4}H;\ R = \frac{3}{4}H.$$

Углы α и $\beta = \varphi$ вычисляются соответственно из треугольников AOS и EOS.

Правильная четырехугольная пирамида. На рис. 136 изображена правильная четырехугольная пирамида $SABCD$. В основании такой пирамиды лежит квадрат, а вершина пирамиды проектируется в его центр.

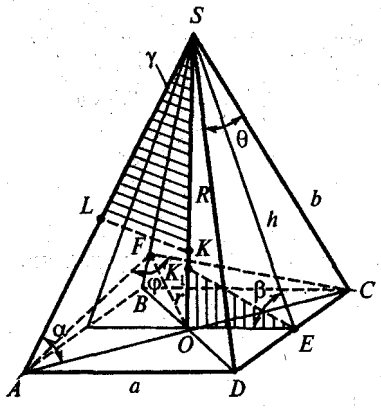


Рис. 136

Основные элементы пирамиды:

a — длина стороны основания;

b — длина бокового ребра пирамиды;

h — длина апофемы боковой грани;

H — высота пирамиды;

α — величина угла между боковым ребром пирамиды и плоскостью основания пирамиды, $0 < \alpha < \pi/2$;

β — величина угла между плоскостью боковой грани и плоскостью основания пирамиды, $0 < \beta < \pi/2$;

θ — величина угла при вершине пирамиды, $0 < \theta < \pi/2$;

φ — величина угла между боковыми гранями пирамиды, $\pi/2 < \varphi < \pi$;

r — радиус вписанного шара;

R — радиус описанного шара.

Нахождение большинства элементов правильной четырехугольной пирамиды аналогично нахождению тех же элементов правильной треугольной пирамиды. При вычислении этих элементов

основную роль играют треугольники, расположенные в плоскостях симметрии ASC, BSD, ESM пирамиды, проходящие через ее высоту SO и, следовательно, перпендикулярные плоскости основания. Рассмотрим следующий пример.

Задача 5. *В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$* (рис. 136) *известны: a — длина стороны основания пирамиды и H — длина ее высоты. Найти остальные элементы пирамиды, т.е.* α, β, θ, φ, b, r *и* R.

Решение. Вычисляем:

1) угол α наклона боковых ребер пирамиды к плоскости ее основания и длину b боковых ребер из ΔAOS:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{SO}{AO} = \frac{H}{a\sqrt{2}/2} = \frac{H\sqrt{2}}{a}, \quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{H\sqrt{2}}{a};$$

$$b = \sqrt{AO^2 + SO^2} = \sqrt{H^2 + a^2/2};$$

2) угол β наклона боковых граней пирамиды к плоскости ее основания и длину h апофемы боковой грани из ΔEOS:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{SO}{EO} = \frac{2H}{a}, \quad \beta = \operatorname{arctg}\frac{2H}{a}; \quad h = \sqrt{EO^2 + SO^2} = \sqrt{a^2/4 + H^2};$$

3) угол θ при вершине пирамиды из ΔDSC:

$$a^2 = 2b^2 - 2b^2 \cdot \cos\theta,$$

откуда

$$\cos\theta = \frac{2H^2}{2H^2 + a^2}, \; \theta = \arccos\frac{2H^2}{a^2 + 2H^2};$$

4) угол φ между боковыми гранями пирамиды из ΔACF ($AF \perp SB$, $CF \perp SB$):

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{AO}{AF} = \frac{a\sqrt{2}/2}{AF},$$

где $b \cdot AF = ah$, т.е. $AF = a\sqrt{H^2 + a^2/4} / \sqrt{H^2 + a^2/2}$,

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{2H^2 + a^2}{4H^2 + a^2}};$$

5) радиус r вписанного в пирамиду шара из ΔEK_1O (EK_1 — биссектриса угла OES):

$$\frac{r}{OE} = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}, \quad r = \frac{a}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2},$$

где $\beta = \operatorname{arctg}(2H/a)$. Радиус r можно найти также по объему V пирамиды и площади S ее полной поверхности: $r = 3V/S$;

6) радиус R описанного вокруг пирамиды шара из ΔKLS (KL — высота равнобедренного треугольника AKS):

$$R\cos\gamma = \frac{b}{2}, \quad R = \frac{b}{2\cos\gamma}.$$

Поскольку $\cos\gamma = OS/AS = H/b$, то $R = b^2/2H$ и

$$R = \frac{a^2 + 2H^2}{4H}.$$

Задача 6. *В правильной четырехугольной пирамиде SABCD даны длина a стороны основания и угол φ между боковыми гранями. Вычислить высоту пирамиды H.*

Решение. Из прямоугольного треугольника AFO (рис. 136) находим его катет FO:

$$FO = AO\cdot\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}.$$

Поскольку плоскость треугольника ACF перпендикулярна ребру BS, то отрезок FO также перпендикулярен этому ребру и является высотой треугольника BOS. Из прямоугольного треугольника BOF находим:

$$\sin\alpha = \frac{FO}{BO} = \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}, \quad \left(\frac{\pi}{4} < \frac{\varphi}{2} < \frac{\pi}{2}\right),$$

где α — угол между боковым ребром пирамиды и плоскостью ее основания. После этого из прямоугольного треугольника BOS находим H:

$$H = BO\cdot\operatorname{tg}\alpha = \frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\operatorname{ctg}\varphi/2}{\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2\varphi/2}}.$$

ЗАДАЧИ

1. Величина угла между боковым ребром и плоскостью основания правильной треугольной пирамиды равна α. Найти отношение радиусов вписанного в пирамиду и описанного около нее шаров.

Ответ: $1/2 \cdot \cos\alpha\,(\sqrt{1+4\mathrm{tg}^2\alpha}-1)$.

2. Вычислить расстояние между центрами вписанного в правильную треугольную пирамиду шара и шара, описанного около нее, если известно, что длина стороны основания пирамиды равна $3\sqrt{3}$ см, а длина ее высоты — 9 см.

Ответ: $(17-\sqrt{37})/4$ см.

3. Доказать, что если центры вписанного и описанного около правильной треугольной пирамида шаров совпадают, то эта пирамида — правильный тетраэдр.

4. Длина стороны основания правильной треугольной пирамиды равна a, а величина плоского угла при ее вершине — θ. Найти расстояние между боковым ребром пирамиды и скрещивающейся с ним стороной основания.

Ответ: $a\sqrt{1+2\cos\theta}/2$.

5. В шар радиуса R вписано множество правильных треугольных пирамид. У какой пирамиды может быть наибольший объем и чему равна максимальная величина объема?

Ответ: $\theta=\pi/3$; наибольший объем — $8\sqrt{3}R^3/27$.

6. Плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды равен θ, а длина высоты — H. Найти объем пирамиды.

Ответ: $2/3 \cdot H^3(1-\cos\theta)/\cos\theta$.

7. Объем правильной четырехугольной пирамиды равен V, а длина стороны основания — a. Найти радиус вписанного в пирамиду шара.

Ответ: $1/12 \cdot (\sqrt{36V^2+a^6}-a^3)\cdot a/V$.

8. Доказать, что боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды перпендикулярно скрещивающейся с ним диагонали основания.

9. Найти плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды, если величина двугранного угла между его боковыми гранями равна φ.

Ответ: $\arccos \operatorname{ctg}(\varphi/2)$, $\pi/2 < \varphi < \pi$.

10. В шар радиуса R вписываются правильные четырехугольные пирамиды. При каком значении угла при вершине пирамиды ее объем будет наибольшим? Указать величину этого объема.

Ответ: $\theta = \arccos 2/3$; наибольший объем равен $32R^3/81$.

§ 3. РАСЧЕТ ЭЛЕМЕНТОВ ПИРАМИД МЕТОДОМ СОСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

Задачи, рассмотренные в предыдущем параграфе, позволяют стандартным методом рассчитывать различные элементы правильных пирамид через заданные. При этом такие пары элементов, как, например, сторона основания и боковое ребро; боковое ребро и угол при вершине пирамиды; сторона основания и высота и т.д., можно назвать «*удобными параметрами*», потому что через них особенно просто рассчитываются многие другие элементы пирамиды. В то же время в ряде задач требуется рассчитать тот или иной элемент пирамиды при более сложном виде исходных условий. Например, требуется найти *объем правильной треугольной пирамиды, в которой высота пирамиды равна H, а площадь поверхности описанного около нее шара в 4 раза больше площади сечения этого шара плоскостью, содержащей основание пирамиды.*

В этой задаче известен только один из «удобных» элементов пирамиды — длина H ее высоты. Другое же условие сразу использовать в стандартных расчетах затруднительно. Поэтому поступают следующим образом. Вводят в качестве неизвестного еще один «удобный» элемент, например, длину x стороны основания пирамиды. Тогда искомый объем V пирамиды выражается простой формулой

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \cdot H.$$

Таким образом, задача сводится к отысканию величины x. Как же она определяется?

Для нахождения величины x служит условие задачи, говорящее, что *площадь поверхности описанного около пирамиды шара в 4 раза больше сечения этого шара плоскостью, содержащей основание пирамиды.* Запишем это условие в виде уравнения. Поскольку

$$S_{ш} = 4\pi R^2; \; S_{сеч} = \pi\left(\frac{x\sqrt{3}}{3}\right)^2,$$

то уравнение имеет вид:

$$\frac{4\pi R^2}{\pi x^2/3} = 4,$$

откуда находим $R = x/\sqrt{3}$.

Радиус R описанного шара выражается через длину b бокового ребра пирамиды и ее высоту H по формулам

$$R = \frac{b^2}{2H} \quad \text{или} \quad R = \frac{H^2 + x^2/3}{2H} = \frac{3H^2 + x^2}{6H}.$$

Отсюда получаем квадратное уравнение для определения x:

$$\frac{3H^2 + x^2}{6H} = \frac{x}{\sqrt{3}},$$

единственным решением которого является x, равное $H\sqrt{3}$. После этого находим объем пирамиды: $V = H^3 \cdot \sqrt{3}/4$.

Метод расчета, основанный на введении неизвестных и составлении для них соответствующего числа уравнений, применим во многих других задачах. Рассмотрим конкретные примеры.

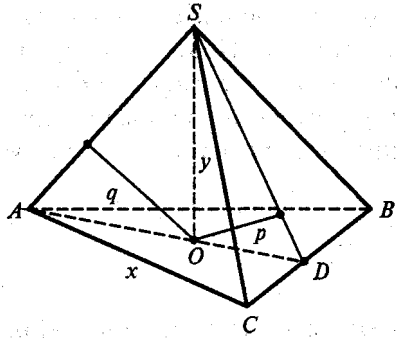


Рис. 137

Задача. *В правильной треугольной пирамиде расстояния от центра основания до плоскости боковой грани и до бокового ребра равны соответственно p и q. Найти объем пирамиды.*

Решение. В этой задаче обе заданные величины p и q следует отнести к разряду «неудобных». Поэтому введем два более «удобных» параметра $x = a$ и $y = H$ — длину стороны основания и длину высоты (рис. 137). Тогда очевидны следующие соотношения:

1) из ΔAOS: $AS = \sqrt{AO^2 + OS^2} = \sqrt{x^2/3 + y^2}$. Поскольку $AO \cdot OS = AS \cdot q$, то имеем первое уравнение:

$$\frac{x\sqrt{3}}{3}y = q\sqrt{\frac{x^2}{3}+y^2};$$

2) из ΔDOS: $DS = \sqrt{DO^2+OS^2} = \sqrt{x^2/12+y^2}$.. Поскольку $DO \cdot OS = DS \cdot p$, то имеем второе уравнение:

$$\frac{x\sqrt{3}}{6}y = p\sqrt{\frac{x^2}{12}+y^2}.$$

Таким образом, для определения двух неизвестных имеем систему двух уравнений.

После возведения в квадрат обеих частей каждого уравнения получаем:

$$\begin{cases} x^2y^2 = (x^2+3y^2)q^2, \\ x^2y^2 = (x^2+12y^2)p^2. \end{cases}$$

Поделив каждое уравнение на x^2y^2, представим эту систему в виде двух линейных уравнений относительно двух неизвестных $1/x^2$ и $1/y^2$:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{q^2}, \\ \dfrac{12}{x^2}+\dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{p^2}. \end{cases}$$

Отсюда находим:

$$x = 3pq/\sqrt{q^2-p^2}, \quad y = \sqrt{3}pq/\sqrt{4p^2-q^2} \quad (p < q < 2p).$$

После этого вычисляем объем пирамиды:

$$V = \frac{1}{3}\frac{x^2\sqrt{3}}{4}y = \frac{9}{4}\cdot\frac{p^3q^3}{(q^2-p^2)\sqrt{4p^2-q^2}}.$$

Задача. *Объем шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, относится к объему всей пирамиды как* $\pi : 8$. *Найти плоский угол при вершине пирамиды.*

Решение. Прежде всего заметим, что по данным задачи пирамида не определяется однозначно. Любая пирамида, подобная той, которая удовлетворяет условию задачи, также удовлетворяет этому условию. Поэтому ясно, что ни один размерный элемент рассматриваемой пирамиды не может быть определен однозначно; в то же время угловые (и любые безразмерные) элементы пирамиды определяются однозначно. Все это позволяет принять какой-нибудь линейный элемент пирамиды, например, длину a стороны ее основания, за 1.

Обозначим угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости ее основания через β и постараемся составить уравнение для его определения. Считая β заданным и полагая $a = 1$, находим:

1) $r = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}, \quad V_{ш} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi}{6}\operatorname{tg}^3\frac{\beta}{2};$

2) $H = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\beta, \quad V_{пир} = \frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{6}\operatorname{tg}\beta.$

Приравняв отношение объемов шара и пирамиды заданному числу, получим уравнение для определения β.

$$\frac{\pi/6\cdot\operatorname{tg}^3\beta/2}{1/6\cdot\operatorname{tg}\beta} = \frac{\pi}{8}.$$

В развернутом виде это уравнение имеет вид

$$\operatorname{tg}^2\beta/2\cdot(1-\operatorname{tg}^2\beta/2) = 1/4.$$

Здесь использована формула для тангенса двойного аргумента.

Из полученного уравнения находим единственное решение

$$\operatorname{tg}^2\beta/2 = 1/2$$

и затем

$$\operatorname{tg}\beta = 2\sqrt{2}.$$

После того как угол β найден, в нашем распоряжении имеется уже два «удобных» элемента: сторона основания 1 и угол β. Поэтому можно стандартным приемом (см. гл. 2, § 2) вычислить величину искомого угла при вершине пирамиды. Имеем (рис. 136):

$$H = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\beta = \sqrt{2}, \quad h = \sqrt{OS^2 + OE^2} = \sqrt{2+\frac{1}{4}} = \frac{3}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{DE}{SE} = \frac{1/2}{3/2} = \frac{1}{3}, \quad \theta = 2\operatorname{arctg}(1/3),$$

что и требовалось найти.

ЗАДАЧИ

1. Длина стороны основания правильной треугольной пирамиды равна a, а высота, опущенная из какой-нибудь вершины основания на противоположную ей боковую грань, равна h. Определить объем пирамиды.

Ответ: $1/12a^3h/\sqrt{3a^2-4h^2}$.

2. Из основания высоты правильной треугольной пирамиды опущен перпендикуляр на боковое ребро. Его длина равна p. Найти объем пирамиды, если величина двугранного угла между плоскостью боковой грани и плоскостью основания пирамиды равна β.

Ответ: $1/24\, p^3 \operatorname{tg}\beta\,(12\operatorname{ctg}^2\beta+3)^{1,5}$, $0<\beta<\pi/2$.

3. Объем правильной треугольной пирамиды равен 1/6 куба длины бокового ребра. Найти величину плоского угла при вершине пирамиды.

Ответ: $\pi/2$.

4. Длина высоты правильной четырехугольной пирамиды равна H, а плоские углы при вершине равны θ. Определить объем пирамиды.

Ответ: $4/3\, H^3 \cdot \sin^2(\theta/2)/\cos\theta$.

5. В правильной четырехугольной пирамиде точка P лежит на высоте и делит ее в отношении 1 : 3, считая от основания. Расстояние от P до бокового ребра равно p, а до боковой грани — q. Определить площадь поверхности пирамиды.

Ответ: $32\sqrt{2}p^3q^2/[9(p^2-q^2)\sqrt{2q^2-p^2}]$.

6. Высота правильной треугольной пирамиды равна H. Точка пересечения высот каждой из боковых граней и вершина пирамиды лежат на поверхности шара радиуса R. Найти объем пирамиды.

Ответ: $1/2H^2\sqrt{3}\,(H-2R)$, $H>2R$.

7. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ (S — вершина) с длиной стороны основания a и длиной бокового ребра a. Сфера с центром в точке O проходит через точку A и касается ребер SB и SD в их серединах. Найти объем пирамиды $OSCD$.

Ответ: $5a^3\sqrt{2}/96$.

8. В правильной шестиугольной пирамиде длина высоты равна 6, радиус описанного шара равен 19. Найти радиус вписанного шара.

Ответ: $12\sqrt{5}-24$.

9. Стороны оснований правильной шестиугольной усеченной пирамиды имеют длины a и $3a$. Расстояние между двумя параллельными ребрами, лежащими в плоскостях различных оснований и в различных боковых гранях, равно h. Вычислить площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через указанные параллельные ребра.

Ответ: $6ah$.

10. В правильной четырехугольной пирамиде длина высоты равна 1, а отношение квадрата длины бокового ребра к квадрату длины стороны основания равно x. Найти зависимость объема пирамиды от x.

Ответ: $V = 1/3(x-0{,}5)^{-1}$, $x > 0{,}5$.

§ 4. СЕЧЕНИЕ ПИРАМИДЫ ПЛОСКОСТЬЮ

Решение большинства стереометрических задач сводится в конечном счете к решению ряда планиметрических задач. При этом «расчленение» каждой пространственной задачи на последовательность плоских задач чаще всего связано с построением различного вида сечений рассматриваемой пространственной фигуры, в частности пирамиды, плоскостью.

Построить сечение — это значит указать линии пересечения секущей плоскости с гранями рассматриваемого многогранника, в том числе точки её пересечения с ребрами многогранника.

Для построения сечений используются следующие **правила**:

а) через три точки фигуры, не лежащие на одной прямой, можно провести единственное сечение;

б) если две какие-либо точки принадлежат сечению, то принадлежит сечению и прямая, проходящая через эти точки. В том случае, когда точки лежат на одной из граней многогранника, эта прямая является линией пересечения грани с сечением;

в) параллельные грани многогранника (или вообще параллельные плоскости) пересекаются сечением по параллельным прямым.

При построении сечений многогранников, в том числе и пирамид, как правило, выполняют дополнительные построения. Весьма часто эти построения связаны с продолжением линий пересечения секущей плоскости с гранями многогранника за пределы этой грани. Рекомендуется сохранять эти построения, поскольку они используются для обоснования чертежа, и для последующих расчетов.

Рассмотрим несколько типовых задач на построение сечений пирамиды плоскостью.

Задача 1. *Построить сечение произвольной треугольной пирамиды $SABC$ (S — вершина) плоскостью, проходящей через три точки M, N, P, взятые на ее ребрах SA, SB и SC или на их продолжениях, если дано, что*

$$\frac{SM}{SA} = k, \quad \frac{SN}{SB} = m, \quad \frac{SP}{SC} = n.$$

Найти, в каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды.

Решение. 1) Пусть сначала все три числа k, m, n меньше 1. Тогда $M \in SA$, $n \in SB$, $P \in SC$ (рис. 138). След от сечения пирамиды плоскостью, проходящий через три точки, строится простым соединением точек M, N и P отрезками прямых, лежащих в соответствующих боковых гранях пирамиды, так, что ΔMNP представляет искомое сечение.

Отношение объема пирамиды $SMNP$, получаемой из пирамиды $SABC$ изменением длин ее ребер в k, m и n раз, к объему всей пирамиды $SABC$, как известно (см. задачу 5 после § I гл. II), равно

$$V_{SMNP} = kmn \cdot V_{SABC},$$

поэтому отношение объемов частей, на которые делит пирамиду секущая плоскостью, равно $kmn : (1 - kmn)$.

2) Пусть теперь одно из чисел k, m, n, например, n, больше 1 (т.е. $0 < k \le 1$, $0 < m \le 1$, $n > 1$). Это означает, что точка P лежит на продолжении ребра SC за точку C (рис. 139).

В этом случае сечение представляет собой четырехугольник $MNRQ$. Для его построения в плоскости грани SAC проводится прямая MP, причем отрезок MQ дает первую из сторон искомого четырехугольника; в плоскости грани SBC проводится прямая NP, причем отрезок NR дает другую сторону четырехугольника; наконец, точки M и N соединяются отрезком MN в плоскости грани ASB, а Q и R — отрезком QR в плоскости грани ABC. Таким образом, сечение замыкается.

Особо отметим, что пирамида $CPQR$ (C — вершина), полученная в результате дополнительных построений, очень важна для последующих расчетов.

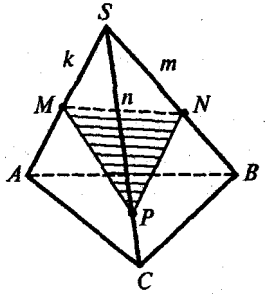


Рис. 138

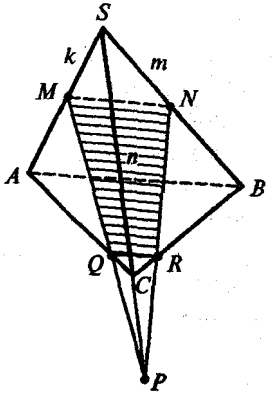


Рис. 139

Вычислим отношение объемов, на которые делится пирамида $SABC$. Для этого заметим, что объем части пирамиды, расположенный выше плоскости сечения, представляет разность объемов пирамид $SMNP$ (S — вершина) и $CPQR$ (C — вершина).

Пирамиду $SMNP$ — можно рассматривать как пирамиду, получающуюся из пирамиды $SABC$ изменением длин ее ребер, исходящих из вершины S, в k, m и n раз, поэтому

$$V_{SMNP} = kmn\, V_{SABC}.$$

Пирамиду $CPQR$ также можно рассматривать как пирамиду, получающуюся из исходной (обозначим ее теперь $CABS$, C — вершина) изменением длин ее ребер в CP/CS, CQ/CA и CR/CB раз, поэтому

$$V_{CPQR} = \frac{CP}{CS}\cdot\frac{CQ}{CA}\cdot\frac{CR}{CB}\cdot V_{SABC}.$$

Одно из этих отношений, а именно CP/CS, известно, оно равно $(n-1)$; два других требуется найти. Как это делается, подробно показано в § 4 гл. 1, где шла речь о пропорциональных отрезках в треугольниках.

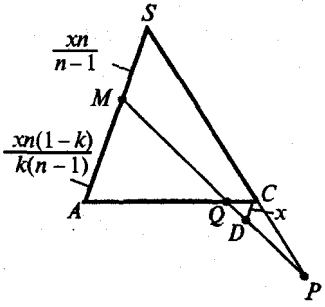


Рис. 140

Найдем, в каком отношении точки Q и R делят стороны основания. Обратимся к рис. 140, на котором отдельно представлена плоскость грани ASC. Так же, как и в других подобных задачах (см. § 4, гл. 1), сделаем дополнительное построение — проведем $CD \parallel SA$ и обозначим длину отрезка CD через x.

Из подобия ΔPSM и ΔPCD с коэффициентом $PS : PC = n/(n-1)$ следует, что $SM = xn/(n-1)$. Поскольку $SM : AM = k(1-k)$, то $AM = xn\,(1-k)/k(n-1)$. Наконец, из подобия ΔQCD и ΔQAM находим отношение $CQ : AQ$. Оно равно $x : xn(1-k)/k(n-1)$. Имеем:

$$\frac{CQ}{AQ} = \frac{k(n-1)}{n(1-k)},$$

откуда получаем

$$\frac{CQ}{CA} = \frac{k(n-1)}{n-k}.$$

Аналогично находится отношение $CR : CB$. Получается формула:

$$\frac{CR}{CB} = \frac{m(n-1)}{n-m}.$$

Учитывая оба эти результата, вычисляем объем пирамиды $CPQR$:

$$V_{CPQR} = (n-1)^3 \frac{mk}{(n-k)(n-m)} \cdot V_{SABC}.$$

Затем находим объем отсекаемой части пирамиды $SABC$, лежащей выше плоскости сечения:

$$V_{SMNRCQ} = V_{SMNP} - V_{CPQR} = mnk\left[1 - \frac{(n-1)^3}{n(n-k)(n-m)}\right]V_{SABC}.$$

3) Если два из трех чисел k, m, n больше единицы ($k > 1$, $m < 1$, $n > 1$), то сечением пирамиды опять будет треугольник NRQ (рис. 141). От пирамиды $SABC$ отсекается пирамида $BNRQ$ (B — вершина). Можно считать, что она получается из исходной пирамиды изменением ее ребер (исходящих из вершины B) в BN/BS, BQ/BC и BR/BA раз. Поэтому

$$V_{BNRQ} = \frac{BN}{BS} \cdot \frac{BQ}{BC} \cdot \frac{BR}{BA} \cdot V_{SABC}.$$

Отношение BN/BS известно по условию, оно равно $(1-m)$, поэтому нужно найти два других отношения. Проводя такие же построения, как и в предыдущем пункте, находим:

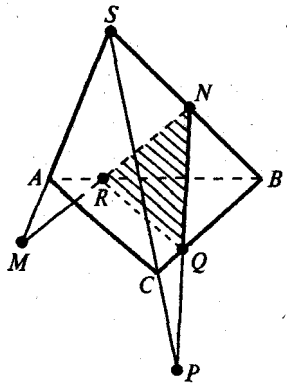


Рис. 141

$$\frac{BQ}{BC} = \frac{n(1-m)}{n-m}, \quad \frac{BR}{BA} = \frac{k(1-m)}{k-m},$$

откуда получаем для объема отсекаемой части выражение

$$V_{BNRQ} = kmn\frac{(1-m)^3}{m(k-m)(n-m)} \cdot V_{SABC},$$

что и завершает решение задачи.

В заключение заметим, что использованный при решении этой задачи метод, основанный на расчете пропорциональных отрезков в треугольниках, применим в большинстве задач «на сечение многогранников».

Задача 2. *Дана правильная четырехугольная пирамида SABCD (S — вершина). На продолжении стороны AB основания за точку A взята точка M, такая, что AM = AB; на другой стороне CD основания взята точка N, причем DN : CN = 1 : 2; третья точка P взята на боковом ребре SB пирамиды в ее середине. В каком отношении делит объем пирамиды плоскость сечения, проходящего через точки M, N и P?*

Решение. Построим сначала сечение пирамиды. Обратимся к рис. 142. Точки M и N, лежащие в плоскости основания пирамиды, принадлежат этому сечению, поэтому принадлежит сечению и вся прямая MN, причем отрезок QN служит одной из сторон многоугольника, по которому сечение пересекается с поверхностью пирамиды.

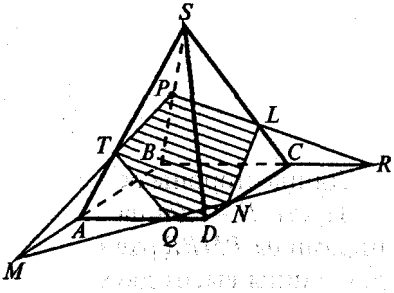


Рис. 142

Точка R пересечения прямой MN с продолжением стороны BC основания лежит в плоскости грани BSC, поэтому в ней лежит и вся прямая PR, проходящая через точки P и R. Отрезок PL этой прямой служит другой стороной искомого многоугольника. Соединяя точки L и N в плоскости грани CSD, получаем третью сторону многоугольника.

Точки M и P, принадлежащие сечению, соединим прямой MP, которая пересекается с боковым ребром AS пирамиды в точке T. Отрезки TP и TQ, принадлежащие граням ASB и ASD, замыкают искомый многоугольник. Таким образом, сечение пирамиды представляется пятиугольником $PLNQT$.

Для расчета отношения объемов, на которые делится пирамида плоскостью сечения, используем дополнительные построения (рис. 142). Объем V_1 части пирамиды, лежащей ниже плоскости сечения, представим как разность объемов пирамиды $PMBR$ (P — вершина) и двух пирамид: $TMAQ$ (T — вершина) и $LCNR$ (L — вершина):

$$V_1 = V_{PMBR} - V_{TMAQ} - V_{LCNR}.$$

Объем каждой из этих трех пирамид зависит от площади ее основания и высоты. Определим эти параметры. Найдем, в каком отношении точки Q, N, R, L и T делят соответствующие ребра пирамиды.

На рис. 143 изображены отдельно плоскости граней $ABCD$, ASB и BSC пирамиды. Треугольники MAQ, QND и CNR подобны (рис. 143*а*), причем коэффициент подобия первого ко второму равен $3 \cdot (AM = 3 \cdot DN)$, а третьего ко второму — $2 \cdot (CN = 2 \cdot DN)$. Отсюда находим $AQ = 3/4$, $CR = 2 \cdot QD = 1/2$, $BR = 3/2$ и затем — площади:

$$S_{MBR} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{2},$$

$$S_{MAQ} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8},$$

$$S_{CNR} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Длина стороны основания пирамиды принята за 1.

Пусть H — длина высоты пирамиды $SABCD$. Тогда высота H_1 пирамиды $PMBR$ равна $H/2$, так как P — середина ребра BS. Найдем длины высот двух других пирамид: $TMAQ$ и $LCNR$. Для этого определим, в каком отношении точки T и L, делят ребра AS и CS пирамиды. Используем метод, изложенный в § 4, гл. 1.

На рис. 143*б*, где вынесена плоскость грани ASB, проведем дополнительно $AE \parallel BS$ и примем $AE = x$. Тогда $PB = 2x$ (так как $MB = 2 \cdot MA$, по условию) и $PS = 2x$ (так как P — середина PS). Из

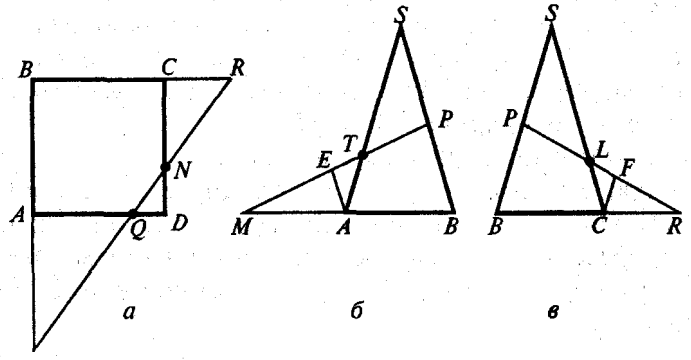


Рис. 143

подобия ΔAET и ΔPST находим $ST : AT = PS : AE = 2x : x = 2$, т.е. $AT = 1/3 \cdot AS$. Следовательно, длина H_2 высоты пирамиды $TMAQ$ равна $H/3$.

Аналогично находим длину H_3 высоты пирамиды $LCNR$. На рис. 143*в*, изображена плоскость грани BSC. Проводим $CF \parallel BS$ и полагаем $CF = y$. Тогда $BP = 3y$ (так как $BR = 3 \cdot CR$, $PS = 3y$, а из подобия треугольников LPS и CFL находим: $CL : LS = 1 : 3$, т.е. $CL = 1/4 \cdot CS$. Следовательно, высота H_3 пирамиды $LCNR$ равна $H/4$.

Теперь вычислим объемы всех пирамид:

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot H = \frac{H}{3},$$

$$V_{PMBR} = \frac{1}{3} \cdot S_{MBR} \cdot \frac{H}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{H}{2} = \frac{H}{4},$$

$$V_{TMAQ} = \frac{1}{3} \cdot S_{MAQ} \cdot \frac{H}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{H}{3} = \frac{H}{24},$$

$$V_{LCNR} = \frac{1}{3} \cdot S_{CNR} \cdot \frac{H}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{H}{4} = \frac{H}{72}.$$

Объем V_1 части пирамиды, лежащей ниже плоскости сечения, равен:

$$V_1 = \frac{H}{4} - \frac{H}{24} - \frac{H}{72} = \frac{7H}{36}.$$

Объем V_2 части пирамиды, лежащей выше плоскости сечения, равен:

$$V_2 = \frac{H}{3} - \frac{7H}{36} = \frac{5H}{36}.$$

Отношение $V_1 : V_2$ равно $7 : 5$.

Рассмотрим еще две характерные задачи.

Задача 3. *Дана правильная треугольная пирамида $SABC$ (S — вершина), сторона основания которой имеет длину a, а боковое ребро — длину b. Изучить сечения этой пирамиды плоскостями, параллельными скрещивающимся ребрам пирамиды (например, AS и BC), показать, что эти сечения — прямоугольники; вычислить площадь сечения, являющегося квадратом.*

Решение. В отличие от предыдущих задач здесь не указаны точки, через которые проводится сечение; условие, задающее такое

сечение, сформулировано в виде требования его параллельности определенным прямым, а именно, скрещивающимся ребрам AS и BC (рис. 144).

Пусть M — произвольная точка, принадлежащая стороне AC основания пирамиды. Проведем искомое сечение через эту точку. Поскольку плоскость такого сечения должна быть параллельной ребру BC, то и линия MQ его пересечения с плоскостью основания пирамиды должна быть параллельной BC, т.е. $MQ \parallel BC$. Аналогично, линия пересечения MN плоскости сечения с боковой гранью ASC должна быть параллельной боковому ребру AS пирамиды. Отрезок прямой NP, являющийся пересечением плоскости сечения с другой боковой гранью BSC, также должен быть параллелен BC.

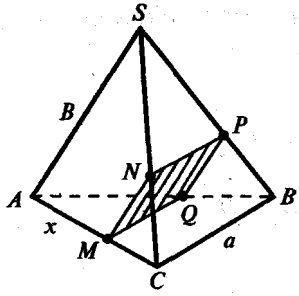


Рис. 144

Наконец, соединив точки P и Q, получим отрезок PQ, замыкающий сечение. Поскольку плоскость сечения параллельна ребру AS, то линия ее пересечения PQ с гранью ASB, содержащей ребро AS, должна быть параллельной этому ребру, т.е. $PQ \parallel AS$. Таким образом, $MN \parallel PQ \parallel AS$ и $MQ \parallel NP \parallel BC$, т.е. фигура $MNPQ$ — параллелограмм.

Далее имеем: $MN \parallel AS$, $MQ \parallel BC$, но $AS \perp BC$, как скрещивающиеся ребра правильной пирамиды. Следовательно, $MN \perp MQ$, т.е. параллелограмм $MNPQ$ — это прямоугольник, что и доказывает первую часть утверждения.

Будем перемещать точку M по ребру AC (рис. 144). Если приближать ее к вершине A, то прямоугольник $MNPQ$, лежащий в сечении, будет «вытягиваться» вверх, если же точку M приближать к вершине C, то основание MQ прямоугольника будет увеличиваться, а высота MN — уменьшаться, прямоугольник будет как бы сплющиваться. Поэтому нетрудно видеть, что существует такое положение точки M на ребре AC, при котором получающаяся в сечении фигура будет квадратом. Найдем его сторону.

Пусть $AM = x$. Из подобия ΔCMN и ΔCAS имеем:

$$\frac{MN}{AS} = \frac{CM}{CA}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{MN}{b} = \frac{a-x}{a}.$$

Кроме того, очевидно, что $MQ = AM = x$, поскольку ΔAMQ — равносторонний, а так как сечение $MNPQ$ — квадрат, то $MN = MQ = x$.

Имеем уравнение:

$$\frac{x}{b}=\frac{a-x}{a}, \quad \text{т.е.} \quad a=\frac{ab}{a+b}.$$

Итак, сторона квадратного сечения имеет длину $ab/(a+b)$, а его площадь равна $a^2b^2/(a+b)^2$.

Рассмотрим аналогичную задачу для правильной четырехугольной пирамиды (рис. 145).

Задача 4. *Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ (S — вершина). Длина стороны ее основания равна a, длина бокового ребра — b. Изучить сечения пирамиды плоскостями, параллельными боковому ребру пирамиды и скрещивающейся с ним диагонали основания (например, SD и AC). Найти те из них, в которые можно вписать окружность.*

Решение. Сечения, о которых идет речь, могут иметь различную форму. Поскольку плоскость сечения параллельна диагонали AC, то, указав точку, через которую его следует провести, мы определим такое сечение однозначно. В качестве таких определяющих точек возьмем точки другой диагонали — BD.

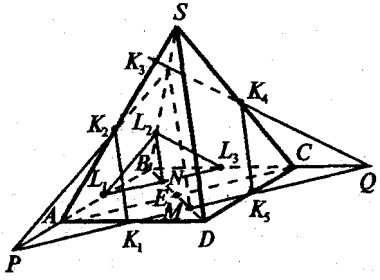


Рис. 145

Пусть N — произвольная точка диагонали BD, принадлежащая ее части BE, где E — центр основания (рис. 145). Построим сечение, проходящее через эту точку. Поскольку его плоскость должна быть параллельна AC, то отрезок L_1L_3, по которому эта плоскость пересекается с основанием пирамиды, должен быть также параллелен AC. С другой стороны, искомая плоскость пересекается с плоскостью BSD диагонального сечения пирамиды по отрезку NL_2. Этот отрезок лежит в той же плоскости, которая содержит другую прямую SD, параллельную искомому сечению. Следовательно, $NL_2 \parallel SD$. Соединив точку L_2 с точками L_1 и L_3, получим треугольник $L_1L_2L_3$, представляющий искомое сечение. Поскольку $NL_2 \parallel SD$, $L_1L_3 \parallel AC$ и, кроме того, $AC \perp SD$, то $NL_2 \perp L_1L_3$ т.е. $\Delta L_1L_2L_3$ — равнобедренный, а NL_2 — его высота.

Перемещая точку N между двумя крайними положениями B и E, каждый раз будем получать в сечении равнобедренный треугольник. Естественно, что в любой из них можно вписать окружность.

Пусть теперь N принадлежит другой половине диагонали BD, а именно, лежит внутри отрезка ED. В дальнейшем будем обозначать эту точку буквой M. Проведем через точку M сечение, параллельное AC и SD. Отрезок K_1K_2 проходящий через точку M параллельно диагонали AC, служит линией пересечения искомой плоскости с основанием пирамиды. Поскольку плоскость сечения параллельна боковому ребру SD, то отрезки K_1K_2, MK_3 и K_5K_4, лежащие соответственно в плоскостях ASD, BSD и CSD, также параллельны этому ребру, а значит, и друг другу. Соединив точку K_3 с точками K_2 и K_4, получим пятиугольник $K_1K_2K_3K_4K_5$, представляющий искомое сечение. Ясно, что $K_1K_2 \perp K_1K_5$ и $K_5K_4 \perp K_1K_5$, поскольку $SD \perp AC$. Кроме того, $K_2K_3 = K_4K_3$, т.е. фигура, представляющая сечение, напоминает «домик с равноскатной крышей» (рис. 146).

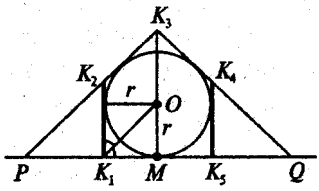


Рис. 146

Перемещая точку M между двумя крайними положениями E и D, мы можем либо увеличивать основание этого «домика», уменьшая высоту его «стен», либо уменьшать основание, увеличивая высоту его «стен».

Заметим, что искомое сечение $K_1K_2K_3K_4K_5$ можно построить и другим способом. Продолжив отрезок K_1K_5 до пересечения со сторонами основания BA и BC в точках P и Q соответственно, можно построить равнобедренный треугольник PK_3Q. Точки K_2 и K_4 пересечения его сторон с боковыми ребрами SA и SC пирамиды дают вершины искомого сечения (рис. 145 и 146).

Не во всякий пятиугольник $K_1K_2K_3K_4K_5$ можно вписать окружность. Действительно, с одной стороны, эта окружность должна быть вписана в равнобедренный треугольник PK_3Q (рис. 146); с другой стороны, перпендикуляры K_2K_1 и K_4K_5, опущенные из точек K_2 и K_4, должны касаться окружности. Найдем, при каких условиях это выполнимо, т.е. укажем, где должна лежать точка M, чтобы в проведенное через нее сечение можно было бы вписать окружность.

Обозначим расстояние BM через x (рис. 145). Тогда $DM = a\sqrt{2} - x$ и $K_1M = DM = a\sqrt{2} - x$. Поскольку длина радиуса r вписанной окружности должна равняться половине основания сечения $K_1K_2K_3K_4K_5$, т.е. K_1M, то $r = a\sqrt{2} - x$. С другой стороны, этот же радиус можно найти как радиус окружности, вписанной в треугольник PK_3Q. Для этого достаточно воспользоваться формулой

$S = pr$, где S — площадь треугольника PK_3Q, а p — его полупериметр. Найдем величины S и p.

Сначала заметим, что $PM = BM = x$, поскольку ΔPBQ — равнобедренный и прямоугольный. Затем найдем длину отрезка MK_3, являющегося высотой треугольника PK_3Q. Из подобия треугольников BMK_3 и BDS, лежащих в плоскости диагонального сечения BSD пирамиды (рис. 145), имеем:

$$\frac{MK_3}{DS} = \frac{BM}{BD} \quad \text{или} \quad \frac{MK_3}{b} = \frac{x}{a\sqrt{2}},$$

откуда $MK_3 = bx / a\sqrt{2}$. Наконец, по теореме Пифагора вычисляем длину стороны ΔPK_3Q:

$$PK_3 = \sqrt{PM^2 + MK_3^2} = \sqrt{x^2 + x^2b^2 / 2a^2} = x\sqrt{1 + b^2 / 2a^2}.$$

Площадь треугольника S и его полупериметр p вычисляем по формулам

$$S = PM \cdot MK_3 = \frac{x^2b}{a\sqrt{2}},$$

$$p = PM + PK_3 = x\left(1 + \sqrt{1 + b^2 / 2a^2}\right).$$

Отсюда находим длину r радиуса вписанной окружности

$$r = \frac{S}{p} = \frac{xb}{a\sqrt{2} + \sqrt{2a^2 + b^2}}.$$

Составляем уравнение для определения x путем приравнивания друг другу двух выражений для величины r:

$$a\sqrt{2} - x = \frac{xb}{a\sqrt{2} + \sqrt{2a^2 + b^2}},$$

откуда находим $x = a\sqrt{2}\left(a\sqrt{2} + \sqrt{2a^2 + b^2}\right) / \left(b + a\sqrt{2} + \sqrt{2a^2 + b^2}\right)$, определяющее положение точки M на диагонали BD.

Приведем еще несколько примеров, в которых требуется определить те или иные параметры построенного сечения.

Задача 5. *В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами $CA = 4$, $CB = 3$. Вершина*

пирамиды S проектируется в точку C, причем SC = 1. На ребрах пирамиды взяты точки: M — на CA, N — на CB, P — на SA, причем MC = 1, NC = NB, SP = PA. Найти величину угла, образуемого плоскостью сечения пирамиды, проходящей через точки M, N и P, с плоскостью основания.

Решение. Чертеж к этой задаче представлен на рис. 147. Сначала построим искомое сечение. Поскольку точки P и M лежат в плоскости боковой грани ASC пирамиды, то в этой плоскости лежит и вся прямая MP, проходящая через данные точки, в том числе и точка R ее пересечения с продолжением ребра SC за точку C. Таким образом, в плоскости BSC другой боковой грани пирамиды известны уже две точки — N и R. Прямая NR, проходящая через них, дает в пересечении с гранью BSC отрезок NQ, являющийся следом от пересечения секущей плоскости с поверхностью пирамиды. Проведя отрезки MN в плоскости ABC и PQ — в плоскости ASB, получим четырехугольник $MNPQ$, представляющий искомое сечение.

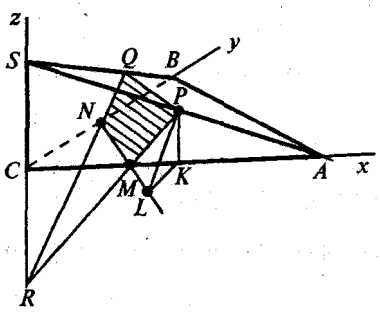


Рис. 147

Затем построим угол между плоскостью сечения и основанием пирамиды. Для этого из точки P опустим на основание пирамиды перпендикуляр PK (точка K попадает, естественно, на AC), поскольку грань ASC перпендикулярна плоскости основания, из точки K опустим высоту на прямую MN и соединим получившуюся точку L пересечения с точкой P.

Угол PLK есть линейный угол двугранного угла между сечением и основанием, величину которого нужно определить. Действительно, PK — перпендикуляр к плоскости основания, $NL \perp KL$ — по построению, следовательно, на основании теоремы о трех перпендикулярах можно заключить, что $NL \perp LP$.

Обозначим $\widehat{PLK} = \alpha$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = PK/LK$. Величина PK известна. Она равна 1/2, т.к. P — середина AS, $PK \parallel SC$ и PK — средняя линия треугольника ASC. Величину LK можно найти, рассмотрев подобные прямоугольные треугольники MCN и MLK в плоскости основания пирамиды. Имеем:

$$\frac{LK}{NC} = \frac{MK}{MN},$$

$NC = BC/2 = 3/2$, $MK = AC/2 - MC = 1$, $MN^2 = MC^2 + NC^2 = 1 + 9/4$, откуда $MN = \sqrt{13}/2$. Таким образом, $LK : 3/2 = 1 : \sqrt{13}/2$, откуда $LK = 3/\sqrt{13}$. Окончательно находим: $\operatorname{tg}\alpha = 1/2 : 3/\sqrt{13} = \sqrt{13}/6$ и $\alpha = \operatorname{arctg}(\sqrt{13}/6)$.

2-й способ. Уместно отметить и другой способ решения этой задачи, основанный на использовании системы координат и скалярного умножения векторов.

Взаимно перпендикулярные ребра пирамиды CS, CA и CB позволяют связать с ними прямоугольную систему отсчета, поместив ее начало в вершине C. Тогда плоскость сечения проходит через три точки, координаты которых известны, а именно $M(1, 0, 0)$, $N(0, 3/2, 0)$, и $P(2, 0, 1/2)$ (рис. 147).

Уравнение плоскости, проходящей через эти точки, будем искать в виде

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Это так называемое «*уравнение плоскости в отрезках*». Числа a, b и c — это координаты точек пересечения плоскости с соответствующими осями координат, точнее говоря, координаты этих точек имеют вид $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ и $(0, 0, c)$.

Подставляя в это уравнение последовательно координаты точек M, N и P, получим три уравнения для определения чисел a, b и c:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a} = 1, \\ \dfrac{3/2}{b} = 1, \\ \dfrac{2}{a} + \dfrac{1/2}{c} = 1. \end{cases}$$

Отсюда находим $a = 1$, $b = 3/2$, $c = -1/2$, т.е. секущая плоскость имеет уравнение

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{3/2} + \frac{z}{-1/2} = 1 \quad \text{или} \quad 3x + 2y - 6z - 3 = 0.$$

Известно далее, что коэффициенты $\{3, 2, -6\}$, стоящие при x, y и z, в уравнении плоскости, можно рассматривать как координаты

вектора $\bar{n}$, перпендикулярного этой плоскости. Аналогично, координаты вектора $\bar{k}$, перпендикулярного плоскости $z = 0$ основания пирамиды, равны $\{0, 0, 1\}$. Поэтому, используя формулу для выражения косинуса угла между векторами через их скалярное произведение и длины, можно вычислить этот угол, который как раз и равен углу между рассматриваемыми плоскостями. Имеем:

$$|\cos\alpha| = \frac{|3\cdot 0\cdot +2\cdot 0+(-6)\cdot 1|}{\sqrt{3^2+2^2+(-6)^2}} = \frac{6}{7} \quad \left(\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{13}}{6}\right),$$

т.е. $\alpha = \operatorname{arctg}(\sqrt{13}/6)$.

Задача 6. *В правильной четырехугольной пирамиде SABCD с вершиной S проведена секущая плоскость P, параллельная стороне AB проходящая через точку касания вписанного шара и грани SAB, а также через точку этого шара, ближайшую к вершине S. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью P, если* $AB = 1$, $SA = \sqrt{5}/2$.

Решение. В отличие от предыдущих задач секущая плоскость задана не тремя точками, принадлежащими ребрам пирамиды, а более сложно. Поэтому построим сначала искомое сечение.

Пусть K — точка касания вписанного шара (O — центр) с боковой гранью SAB (рис. 148). Секущая плоскость должна пересекаться с этой гранью по отрезку MR, параллельному стороне AB. Таким образом, становятся известными две точки M и R, лежащие на ребрах пирамиды и принадлежащие сечению.

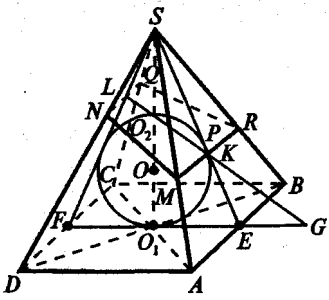


Рис. 148

Обратимся к плоскости SEF симметрии пирамиды, проходящей через апофемы боковых граней. В этой плоскости также известны две точки K и O_2, принадлежащие сечению (O_2 — точка шара, ближайшая к вершине). Следовательно, принадлежит сечению вся прямая O_2K, пересекающаяся с гранью SCD в точке L и с плоскостью основания в точке G. Отрезок NQ, по которому плоскость сечения пересекается с гранью SCD, должен быть параллельным CD, поскольку плоскость сечения параллельна AB и, следовательно, CD. Соединив точки N с M и Q с R, получим четырехугольник $MNQR$, представляющий искомое сечение.

Четырехугольник $MNQR$ — равнобочная трапеция (MR и NQ — основания). Действительно, $MR \parallel NQ$ и $MR \neq NQ$. Кроме того, $MN = RQ$ в силу симметрии. Заметим попутно, что плоскость этой трапеции, параллельная AB, перпендикулярна плоскости SEF, а отрезок LK — высота трапеции, соединяющая середины L и K ее оснований.

Площадь S трапеции $MNQR$ равна:

$$S = \frac{1}{2}(MR + NQ) \cdot LK,$$

поэтому нужно найти MR, NQ и LK. Из подобия ΔSNQ и ΔSCD, ΔSMR и ΔSAB заключаем:

$$NQ = \frac{SL}{SF}, \quad MR = \frac{SK}{SE} \quad (AB = 1).$$

Чтобы вычислить эти отношения, обратимся к плоскости ΔSEF. В этом треугольнике: $SE = SF = \sqrt{AS^2 - AE^2} = 1 = EF$. Следовательно, этот треугольник равносторонний. Такое обстоятельство значительно облегчает решение.

Точка K — середина отрезка SE. Следовательно, $MR = 1/2$. Точка O_2 делит высоту SO_1 в отношении $1 : 2$, считая от вершины. Поскольку $LK \perp NQ$, то LK составляет $1/2$ высоты равностороннего треугольника со стороной, равной 1. Значит, $LK = \sqrt{3}/4$, а точка L отсекает от апофемы SF ее четвертую часть: $NQ = 1/4$. Таким образом, $S = 1/2(1/2 + 3/4) \cdot \sqrt{3}/4 = 3\sqrt{3}/32$.

ЗАДАЧИ

1. В треугольной пирамиде проведена плоскость сечения, параллельная основанию и делящая площадь ее боковой поверхности пополам. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

Ответ: $1 : (2\sqrt{2} - 1)$.

2. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. На ребрах SA и SC взяты точки P и Q, соответственно, причем $AP : PS = 1 : 3$, $CQ = SQ$. Найти отношение, в котором делится ребро SB плоскостью, проведенной через точки D, P и Q.

Ответ: $3 : 4$.

3. Плоскость проходит через вершину A треугольной пирамиды $SABC$, делит пополам медиану SK треугольника SAB, а медиану SL треугольника SAC пересекает в точке D, такой, что $SD = 1/2 \cdot DL$. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

Ответ: 1 : 14.

4. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Через точки A, B и середину ребра SC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

Ответ: 3 : 5.

5. Через одну из сторон основания правильной треугольной пирамиды проведена плоскость, делящая боковую поверхность пирамиды пополам. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

Ответ: 1 : 3.

6. В правильной шестиугольной пирамиде длина стороны основания равна a, а высоты — H. Вычислить площадь сечения, проходящего через середины двух не смежных и не параллельных сторон основания и через середину высоты.

Ответ: $25a\sqrt{4H^2 + 3a^2}\,/\,64$.

7. Ребро правильного тетраэдра $SABC$ имеет длину a. Через вершину A параллельно ребру BC проведена плоскость так, что величина угла между прямой AB и этой плоскостью равна 30°. Найти площадь сечения.

Ответ: $3\sqrt{2}a^2\,/\,25$.

8. Через сторону основания правильной треугольной пирамиды и центр вписанного в нее шара проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды, если длина ее бокового ребра в 3,5 раза больше длины стороны основания?

Ответ: 1 : 4.

9. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S сторона основания имеет длину 4 см. Через сторону CD основания проведено сечение, которое пересекает грань SAB по средней линии треугольника SAB. Площадь сечения равна 18 см^2. Найти объем пирамиды $SABCD$.

Ответ: $32\sqrt{3}$ см^3.

10. На основании правильной треугольной пирамиды, длина высоты которой равна H и радиус круга, вписанного в основание — r, лежит шар, касающийся основания в его центре. Найти радиус шара, если плоскость, проведенная через вершину пирамиды и середины двух сторон основания, касается этого шара.

Ответ: $Hr / \left(r + \sqrt{r^2 + 4H^2}\right)$.

§ 5. КУБ И ЕГО СВОЙСТВА. СЕЧЕНИЕ КУБА ПЛОСКОСТЬЮ. ПРИЗМЫ

Кубом называется прямоугольный параллелепипед, у которого длины всех ребер равны между собой (рис. 149). Куб — это правильный многогранник, все грани которого квадраты.

Куб обладает рядом свойств, которые полезно иметь в виду при решении стереометрических задач. Укажем основные из них:

а) диагональ куба перпендикулярна любой скрещивающейся с ней диагонали граней куба $B'D \perp AC$; $B'D \perp CD'$ и т.д.;

б) диагонали непараллельных граней куба образуют между собой угол величиной 60° ($A'B$ и $A'C'$, BC' и DC' и т.д.);

в) сечение куба плоскостью ($A'C'B$) или ($AD'C$), проходящей через концы ребер куба, исходящих из одной вершины (B' или D), является правильным треугольником;

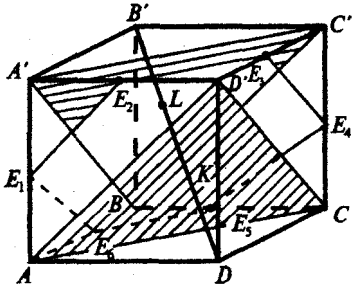


Рис. 149

г) плоскости треугольников $A'C'B$ и $AD'C$ параллельны друг другу, перпендикулярны диагонали куба $B'D$ и делят эту диагональ на три равные по длине части $B'L = LK = KD$;

д) сечение куба плоскостью, перпендикулярной диагонали куба и проходящей через центр куба, представляет собой правильный шестиугольник. Этот шестиугольник пересекается с ребрами куба в их серединах (E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6).

Решение многих экзаменационных задач связано с плоскими сечениями куба. Как правило, в каждой из них требуется построить сечение куба плоскостью, задаваемой теми или иными условиями, например, тремя точками, лежащими на поверхности куба, или двумя точками и условием параллельности плоскости сечения той или иной прямой, или одной точкой и условием параллельности плоскости сечения другой плоскости и т.д. Построение таких сечений и последующие расчеты в принципе не отличаются от решения аналогичных задач для пирамид, о кото-

рых говорилось в предыдущем параграфе. Рассмотрим несколько примеров.

Задача 1. *Дан куб $ABCDA'B'C'D'$, где AA', BB', CC' и DD' — боковые ребра. Найти площадь сечения этого куба плоскостью, проходящей через вершину A и середины ребер $B'C'$ и $C'D'$. Ребро куба имеет длину, равную* 1.

Решение. Сначала построим сечение. Начнем с точек K и L, являющихся серединами ребер $B'C'$ и $C'D'$ (рис. 150). Эти точки лежат в плоскости верхней грани куба, поэтому прямая (KL), проходящая через эти точки, есть линия пересечения секущей плоскости с указанной гранью куба, а отрезок KL — одна из сторон многоугольника, представляющего сечение.

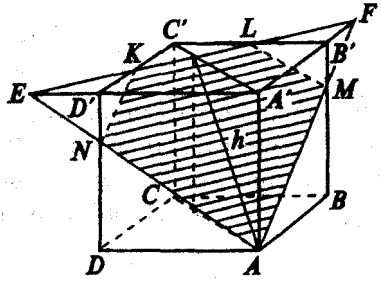


Рис. 150

Продолжив KL до ее пересечения с продолжением ребер куба $A'D'$ и $A'B'$, получим точки E и F, лежащие соответственно в гранях $ADD'A'$ и $AA'B'B$ куба. Тогда в каждой из этих граней будут известны уже по две точки, принадлежащие сечению. Это A и E в плоскости грани $ADD'A'$ и A и F в плоскости грани $AA'B'B$. Поэтому прямые AE и AF принадлежат сечению, а отрезки AN и AM этих прямых — стороны многоугольника, представляющего сечение.

Соединив точки N и K в плоскости грани $CC'D'D$ и точки L и M в плоскости грани $BB'C'C$, получим весь пятиугольник $AMLKN$, представляющий сечение куба рассматриваемой плоскостью.

Заметим, что пятиугольник $AMLKN$ получается из треугольника AEF отсечением от него двух равных треугольников MLF и NKE. Это дает возможность определить площадь сечения по формуле

$$S_{AMLKN} = S_{AEF} - 2S_{NKE}.$$

Площадь равнобедренного треугольника AEF найти нетрудно. Для этого заметим, что из подобия треугольников $B'LF$, $C'KL$ и $D'KE$ с коэффициентом подобия 1 (т.е. фактически, из равенства этих треугольников) следует:

$$A'E = 3/2, \quad A'F = 3/2.$$

откуда

$$EF = \frac{3}{2}\sqrt{2}, \quad AE = AF = \frac{\sqrt{13}}{2},$$

поэтому длина h высоты ΔAEF, опущенной из вершины A на сторону EF, равна $\sqrt{AE^2 - 1/4 \cdot EF^2} = \sqrt{34}/4$, а площадь S_{AEF} равна $3\sqrt{17}/8$.

Поскольку ΔNKE можно получить из ΔAEF изменением длины его стороны EF в $EK/EF = 1/3$ раза, а длины стороны EA — в EN/EA раз, то

$$S_{NKE} = \frac{1}{3} \cdot \frac{EN}{EA} \cdot S_{AEF} = \frac{\sqrt{17}}{8} \cdot \frac{EN}{EA}.$$

Осталось найти отношение EN/EA. Из подобия $\Delta ED'N$ и ΔAND с коэффициентом подобия $ED'/AD = 1/2$ заключаем: $EN : AN = 1 : 2$, откуда находим интересующее отношение $EN : EA = 1 : 3$. Итак, $S_{NKE} = \sqrt{17}/24$. Окончательно имеем:

$$S_{AMLKN} = \frac{3\sqrt{17}}{8} - 2\frac{\sqrt{17}}{24} = \frac{7\sqrt{17}}{24}.$$

Заметим, что к этому же результату можно было бы прийти другим способом, а именно: найти площадь проекции пятиугольника $AMLKN$ на плоскость основания куба (она равна 7/8), а затем разделить эту площадь на косинус угла проектирования, т.е. на косинус угла между плоскостью сечения и плоскостью основания куба. Метод определения этого угла понятен из рис. 151. Имеем: $\cos\varphi = 3/\sqrt{17}$. Тогда искомая площадь равна $7\sqrt{17}/24$.

Еще один пример подобной задачи.

Задача 2. *Дан куб $ABCDA'B'C'D'$, где AA', BB', CC' и DD' — боковые ребра. В каком отношении делит объем куба плоскость, проходящая через вершину A, середину ребра BC и центр грани $DCC'D'$?*

Решение. Построим плоскость сечения. Начнем с точек A и E (E — середина ребра BC). Проведем через них прямую AE до ее пересечения в точке F с продолжением ребра DC. Отрезок AE служит одной из сторон многоугольника, лежащего в сечении куба (рис. 152).

Теперь в плоскости грани $CC'D'D$ куба известны две точки O и F, принадлежащие сечению. Следовательно, прямая OF также

принадлежит плоскости сечения. Отрезок LN ее пересечения с гранью ($CC'D'D$) служит другой стороной искомого многоугольника.

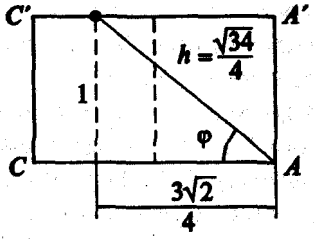


Рис. 151

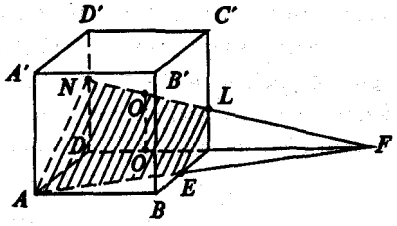


Рис. 152

Соединив точки A и N в грани $AA'D'D$ и — E и L в грани $BB'C'C$, получим искомый четырехугольник $ANLE$, представляющий сечение куба.

Объем V части куба, лежащей ниже плоскости сечения, вычисляется как разность объемов двух треугольных пирамид $DANF$ (D — вершина) и $CELF$ (C — вершина).

Из подобия ΔFEC и ΔFAD с коэффициентом 1/2 имеем: $CF=1$ (если длину ребра куба принять равной 1). Аналогично, из подобия ΔFCL и ΔFOO_1 с коэффициентом 2/3 получим $CL=2/3\cdot OO_1=1/3$, где O_1 — проекция центра O грани $CC'D'D$ на ребро куба CD. Наконец, из подобия ΔFCL и ΔFDN с коэффициентом подобия 1/2, получим $DN=2\cdot CL=2/3$.

Имеем:

$$V_{DANF}=\frac{1}{3}\cdot\frac{DA\cdot DF}{2}\cdot DN=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9};$$

$$V_{CELF}=\frac{1}{3}\cdot\frac{CE\cdot CF}{2}\cdot CL=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{36};$$

$$V_1=V_{DANF}-V_{CELF}=\frac{2}{9}-\frac{1}{36}=\frac{7}{36}.$$

Итак, отношение объемов частей, на которые секущая плоскость делит объем куба, равно 7 : 29.

Задача 3. *Через три точки O, E и F, лежащие на поверхности куба $ABCDA'B'C'D'$ (AA', BB', CC', DD' — боковые ребра), проведена плоскость сечения. Построить это сечение и найти величину угла, образуемого его плоскостью с плоскостью основания куба, если изве-*

стно, что O— центр грани AA'B'B куба, E и F принадлежат ребрам C'D' и BC, соответственно, причем C'E = 1/3 C'D' и BF = FC.

Решение. В отличие от предыдущих задач в этой задаче из трех данных точек O, E и F никакие две не лежат в плоскости одной и той же грани куба, так что сразу провести линию пересечения секущей плоскости с поверхностью куба нельзя (рис. 153).

Поступим следующим образом: спроектируем точки E и O на плоскость основания куба $ABCD$ и получим точки E_1 и O_1, соответственно лежащие на ребрах DC и AB. Через точки E и O, а также через их проекции E_1 и O_1 проведем прямые EO и E_1O_1, которые должны пересечься, поскольку одна из них есть наклонная, а другая — проекция этой наклонной на плоскость основания куба. Пусть K — точка их пересечения. Естественно, она лежит в плоскости основания куба, поэтому в плоскости основания известны уже две точки, принадлежащие сечению: K и F. Следовательно, принадлежит сечению и вся прямая KF, содержащая эти точки. Отрезок MF — одна из сторон искомого многоугольника, лежащего в сечении (M — точка пересечения прямой KF с ребром BC).

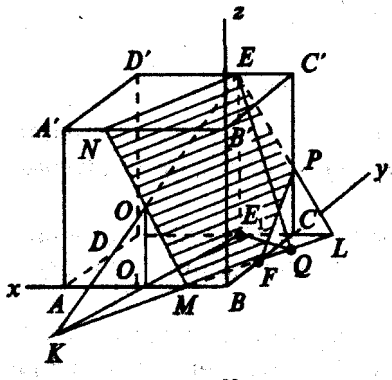


Рис. 153

Пусть L — точка пересечения прямой KF с продолжением ребра DC. Соединим точки L и E. Отрезок EP — это еще одна из сторон многоугольника, лежащего в сечении куба. Соединим точки F и P в грани $BB'C'C$, M и O — в грани $AA'B'B$, N и E — в грани $A'B'C'D'$ (N — точка пересечения прямой OM с ребром $A'B'$), получив остальные стороны пятиугольника $ENMFP$, представляющего сечение куба.

Если из точки E в плоскости треугольника EKL опустить на его основание KL высоту (рис. 153), то угол между секущей плоскостью и основанием куба будет равен углу наклона этой высоты к плоскости основания. Обозначим его величину через α.

Получим:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{EE_1}{E_1Q}.$$

Пусть ребро куба имеет длину, равную 1. Тогда $EE_1 = 1$. Найдем длину отрезка E_1Q. Этот отрезок — высота треугольника KE_1L (рис. 154). Из прямоугольного треугольника E_1LQ находим: $E_1Q = E_1L \cdot \cos\widehat{LE_1Q} = E_1L \cdot \cos\widehat{LFC}$ (поскольку $\widehat{LFC} = \widehat{LE_1Q}$, как углы с взаимно перпендикулярными сторонами).

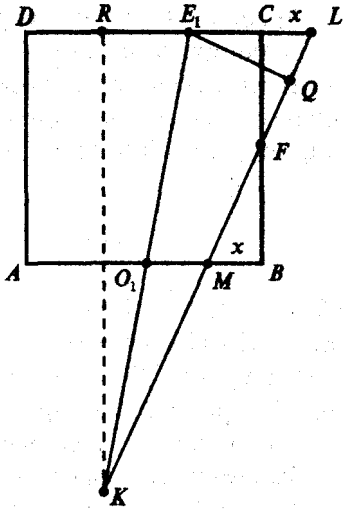


Рис. 154

Обозначим $MB = x$. Тогда $CL = x$ (так как треугольники MBF и CLF равны); $O_1M = 1/2 - x$; $E_1L = 2O_1M = 1 - 2x$, $E_1C = E_1L - CL = 1 - 3x$. Но по условию $E_1C = 1/3$, следовательно, $x = 2/9$. Тогда $E_1L = 1 - 2x = 5/9$.

Далее находим: $\operatorname{tg}\widehat{LFC} = CL/CF = 2/9 : 1/2 = 4/9$ или $\cos\widehat{LFC} = 9/\sqrt{97}$. После этого имеем: $E_1Q = E_1L \cdot \cos\widehat{LFC} = 5/\sqrt{97}$. Следовательно $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{97}/5$, $\alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{97}/5$.

Так же, как и в задаче 5 предыдущего параграфа, косинус искомого угла можно найти иначе, а именно с использованием метода координат. Приняв за начало системы координат вершину B куба, направим ее оси x, y и z соответственно по векторам $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BB'}$. Тогда точки E, O и F, через которые проводится сечение, имеют координаты, $E(1/3, 1, 1)$, $O(1/2, 0, 1/2)$, $F(0, 1/2, 0)$.

Запишем уравнение плоскости, проходящей через эти точки. Будем искать его в виде

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

где a, b и c — неизвестные коэффициенты. Подставив в это уравнение последовательно координаты всех трех точек, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1, \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{c} = 1, \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{b} = 1, \end{cases}$$

откуда находим $a = 2/9$, $b = 1/2$, $c = -5/2$. После этого уравнение плоскости можно записать следующим образом:

$$9x + 4y - 5z - 2 = 0.$$

Числа {9, 4, –5} можно рассматривать как координаты вектора, перпендикулярного проведенной плоскости. Угол между плоскостью сечения и плоскостью основания куба равен углу между векторами, перпендикулярными этим плоскостям, т.е. углу между векторами {9; 4; –5} и {0; 0; 1}. Имеем:

$$\cos\alpha = \frac{9\cdot 0 + 4\cdot 0 - 5\cdot 1}{\sqrt{81+16+25}} = -\frac{5}{\sqrt{122}}.$$

Отсюда видно, что α — тупой угол Острый угол $(\pi - \alpha)$ между плоскостями записывается как $\pi - \arccos(-5/\sqrt{122}) = \arccos(5/\sqrt{122})$ или как $\operatorname{arctg}(\sqrt{97}/5)$. Как видно, в данном случае этот способ приводит к результату гораздо быстрее, чем предыдущий.

Рассмотрим теперь несколько задач на сечение призм.

Задача 4. *Дана треугольная призма $ABCA'B'C'$ (AA', BB', CC' — боковые ребра). Плоскость пересекает ребра $A'B'$, $B'C'$ и BC соответственно в точках M, N и P. Найти, в каком отношении делит эта плоскость объем призмы, если известно, что $B'M : A'B' = 1 : 2$, $B'N : B'C' = 2 : 3$ и $BP : CB = 1 : 3$.*

Решение. Чертеж к этой задаче представлен на рис. 155. Сечение строится в следующем порядке. Точки N и M соединяются отрезком MN; через точки N и P в плоскости боковой грани $BB'C'C$ проводится прямая NP до ее пересечения в точке K с продолжением ребра BB'. Через две точки M и K, лежащие в плоскости боковой грани $AA'B'B$, проводится прямая KM, точка Q ее пересечения с ребром AB призмы соединяется отрезком PQ с точкой P. Четырехугольник $MNPQ$ — искомое сечение ($MNPQ$ — трапеция, поскольку $MN \parallel PQ$).

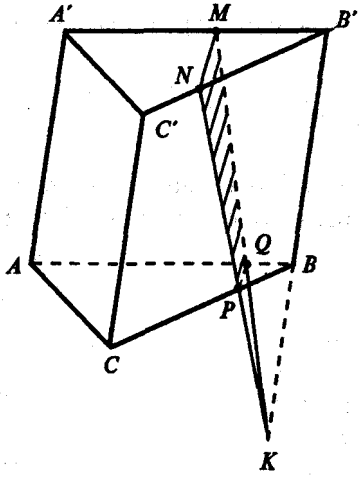


Рис. 155

Учитывая, что пирамида $KPQB$ (K — вершина) подобна пирамиде $KNMB'$ (K — вершина) с коэффициентом подобия 1/2 (действитель-

но, из подобия треугольников KPB и KNB' следует, что $KB : KB' = PB : NB'$, т.е. как 1 : 2), находим:

$$V_{KPQB} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot V_{KNMB'}$$

или объем V_1 части призмы, лежащей правее плоскости сечения (рис. 155), равен 7/8 объема $V_{KNMB'}$ пирамиды $KNMB'$.

Сравним объем пирамиды $KNMB'$ с объемом V призмы. Имеем:

$$V = S_{ABC} \cdot H; \quad V_{KNMB'} = \frac{1}{3} \cdot S_{NMB'} \cdot 2H,$$

где H — высота призмы, S_{ABC} — площадь ее основания; $2H$ — высота пирамиды $KNMB'$, $S_{NMB'}$ — площадь ее основания. Далее:

$$S_{NMB'} = \frac{NB'}{C'B'} \cdot \frac{MB'}{A'B'} \cdot S_{ABC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC}$$

(см. § 1, гл. 1). Следовательно,

$$V_{KNMB'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot 2H = \frac{2}{9} V.$$

Отсюда объем V_1 отсекаемой части равен

$$V_1 = \frac{7}{8} V_{KNMB} = \frac{7}{8} \cdot \frac{2}{9} V = \frac{14}{72} V.$$

Следовательно, объем призмы делится в отношении 14 : 58 или 7 : 29.

Наконец, рассмотрим последний пример задачи подобного типа.

Задача 5. *В прямую призму $ABCDA'B'C'D'$, основанием которой является ромб $ABCD$, а AA', BB', CC' и DD' — боковые ребра, вписан шар радиуса $2R$. Найти площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины A, B и C', если известно, что $\widehat{BAD} = \alpha$.*

Решение. Покажем сначала, как проходит упомянутая в условии задачи плоскость сечения. Поскольку ей принадлежат точки A, B и C', то сторона AB основания и диагональ BC' боковой грани будут линиями пересечения секущей плоскости с поверхностью призмы. Чтобы построить остальные стороны многоугольника, лежащего в

сечении, заметим, что они должны быть параллельными уже построенным отрезкам. Действительно, параллельные плоскости пересекаются секущей плоскостью по параллельным прямым. Отсюда следует, что сечению должны принадлежать отрезки $D'C'$ и AD', т.е. искомое сечение призмы — это параллелограмм $ABC'D'$ (рис. 156).

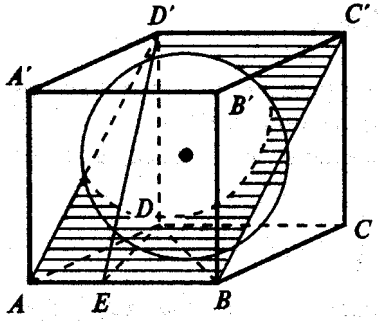


Рис. 156

Поскольку призма прямая и в основании лежит ромб, то проекция вписанного в призму шара на плоскость основания представляет окружность, вписанную в ромб. Значит, высота этого ромба равна $2R$. Эту же длину имеет и высота призмы, поскольку в нее можно вписать шар радиуса R. Если из точки D' опустить на сторону AB перпендикуляр $D'E$, лежащий в плоскости сечения, и соединить полученную точку E с вершиной D, то линейный угол двугранного угла между плоскостями основания и сечения дается углом DED'. Действительно, $D'E \perp AB$ по построению; $DE \perp AB$ — по теореме о трех перпендикулярах. Так как высота призмы DD', и высота ромба DE имеют одинаковую длину, равную $2R$, то угол $\widehat{DED'}$ равен 45°.

Площадь сечения найдем по формуле

$$S_{ABCD} = S_{\text{сеч.}} \cdot \cos 45°,$$

в которой $S_{\text{сеч.}}$ — площадь сечения, S_{ABCD} — площадь основания призмы, являющегося проекцией сечения $ABC'D'$ на плоскость основания.

Из прямоугольного треугольника AED, лежащего в основании призмы, находится сторона ее основания $AD = 2R/\sin\alpha$, а затем и сама площадь основания

$$S_{ABCD} = \frac{2R}{\sin\alpha} \cdot \frac{2R}{\sin\alpha} \cdot \sin\alpha = \frac{4R^2}{\sin\alpha}.$$

После этого определяется площадь сечения:

$$S_{\text{сеч.}} = S_{ABCD} : \cos 45° = \frac{4\sqrt{2}R^2}{\sin\alpha}.$$

ЗАДАЧИ

1. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ с боковыми ребрами AA', BB', CC' и DD'. На продолжении ребер AB, AA', AD отложены соответственно отрезки BP, $A'Q$, DR длиной $1{,}5 \cdot AB$ так, что $AP = AQ = AR = 2{,}5 \cdot AB$. Через точки P, Q и R проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем куба?

Ответ: 1 : 47.

2. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ с боковыми ребрами AA', BB', CC' и DD'. В каком отношении делит ребро $C'B'$ точка E, которая принадлежит плоскости, проходящей через вершину A и центры граней $A'B'C'D'$ и $B'C'CB$?

Ответ: 2 : 1.

3. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$, где AA', BB', CC' и DD' — боковые ребра. Найти площадь шестиугольника, который получается в сечении куба плоскостью, проходящей через центр куба и середины ребер AB и BC. Ребро куба имеет длину, равную 1.

Ответ: $3\sqrt{3}/4$.

4. Длина ребра куба $ABCDA'B'C'D'$ ($AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$) равна 1. На ребре AA' взята точка E так, что длина отрезка AE равна 1/3; на ребре BC взята точка F так, что длина отрезка BF равна 1/4. Через центр куба и точки E и F проведена плоскость. Найти расстояние от вершины B до этой плоскости.

Ответ: $11\sqrt{170}/170$.

5. Дан куб $ABCDA'B'C'D$ ($AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$), причем длина его ребра равна a. Точка E' — середина ребра $C'D'$, точка F' — середина ребра $B'C'$. Найти радиус сферы, проходящей через точки E', F, A, C.

Ответ: $a\sqrt{41}/8$.

6. Найти площадь сечения куба $ABCDA'B'C'D'$ (AA', BB', CC', DD' — боковые ребра) плоскостью, проходящей через вершину D и середины ребер $A'B'$ и $B'C'$. Ребро куба имеет длину, равную a.

Ответ: $7a^2\sqrt{17}/24$.

7. Дана правильная треугольная призма $ABCA'B'C'$ с боковыми ребрами AA', BB', и CC'. На продолжении ребра $A'B'$ взята точка M так, что $BM' = 1/2 \cdot A'B'$ ($A'M = 3/2 \cdot A'B'$). Через точку M и се-

редины ребер $A'C'$ и $B'B$ проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем призмы?

Ответ: 49 : 95.

8. Дана прямая призма, у которой основанием служит правильный треугольник. Через одну из сторон нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания проведена плоскость. Величина угла между этой плоскостью и плоскостью основания призмы равна α, а площадь сечения призмы равна S. Определить объем призмы.

Ответ: $\sqrt[4]{3}(S\cos\alpha)^{3/2}$.

9. Дана прямая треугольная призма $ABCA'B'C'$, $AA' \parallel BB' \parallel CC'$, у которой $AC = 6$, $AA' = 8$. Через вершину A проведена плоскость, пересекающая ребра BB' и CC' соответственно в точках M и N. Найти, в каком отношении эта плоскость делит объем призмы, если известно, что $BM = MB'$, а AN является биссектрисой угла CAC'.

Ответ: 7/17.

10. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ с ребром, длина которого равна 1. На продолжении $D'D$ за точку D взята точка P такая, что $DP = 1/2$. Через точку P и середины ребер AA' и CC' проведена плоскость. Найти площадь получившегося сечения.

Ответ: $3\sqrt{3}/4$.

§ 6. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ШАРОВ, ШАРОВ И ПЛОСКОСТЕЙ

Рассмотрим некоторые типовые задачи, в которых речь идет о взаимном расположении шаров или шаров и плоскостей. Во многом приемы их решения схожи с приемами, используемыми при решении задач на взаимное расположение окружностей, о которых речь шла в § 5 гл. 1.

Пусть, например, *в пространстве даны четыре одинаковых шара, имеющие радиус R, и попарно касающиеся друг друга внешним образом, как это показано на рис. 157. Пусть требуется найти радиус пятого шара, содержащего данные шары внутри себя и имеющего с каждым из них внутреннее касание.*

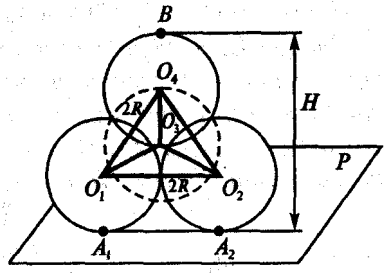


Рис. 157

Ключом к анализу подобной комбинации пространственных тел может служить рассмотрение многогранника $O_1O_2O_3O_4$ с вершинами в центрах данных шаров. Если вспомнить, что расстояние между центрами любой пары касающихся внешним образом шаров равно сумме их радиусов, то станет ясно, что длины всех ребер такого многогранника будут известны. Так, например, центры O_1, O_2, O_3, O_4 данных шаров являются вершинами правильного тетраэдра с длиной ребра $2R$. С другой стороны, если шары касаются друг друга внутренним образом, то точка их касания принадлежит линии, соединяющей центры, а расстояние между центрами равно разности радиусов этих шаров. Для рассматриваемой конфигурации центр пятого, описанного, шара находится в центре правильного тетраэдра $O_1O_2O_3O_4$. Этот центр, как известно, делит высоту тетраэдра в отношении 3 : 1, считая от вершины.

Обозначив через x радиус искомого шара, а через h, — высоту тетраэдра $O_1O_2O_3O_4$, получим уравнение

$$x - R = \frac{3}{4} \cdot h.$$

Если учесть, что длина высоты тетраэдра с ребром $2R$ равна $2R\sqrt{2/3}$, то радиус пятого шара определится выражением

$$x = R + \frac{3}{4}h = R + \frac{3}{4}\cdot 2R\sqrt{\frac{2}{3}} = R\left(1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right).$$

Аналогично решаются и другие задачи.

Задача 1. *Три одинаковых шара радиуса R попарно касаются друг друга и некоторой плоскости внешним образом. Четвертый шар радиуса R лежит с той же стороны плоскости, что и первые три шара, и касается каждого из них. Найти расстояние от точки четвертого шара, максимально удаленной от плоскости, до этой плоскости.*

Решение. Нетрудно заметить, что искомое расстояние H складывается из суммы двух радиусов и длины h высоты пирамиды $O_1O_2O_3O_4$ (рис. 157). Таким образом, $H = 2R + h$ или $H = 2R(1 + \sqrt{6}/3)$.

Задача 2. *Внутри прямого кругового конуса расположены четыре шара одинакового радиуса R, попарно касающиеся друг друга внешним образом, причем три из них лежат на основании конуса и касаются его боковой поверхности, а четвертый — только боковой поверхности конуса. Найти высоту конуса.*

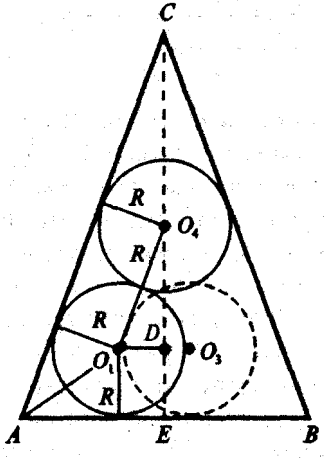


Рис. 158

Решение. Очевидно, что высота такого конуса содержит высоту правильного тетраэдра $O_1O_2O_3O_4$, образованного центрами данных шаров (рис. 158). Рассмотрим сечение конуса и вписанной в него системы шаров плоскостью, проходящей через высоту конуса и центр одного из шаров, например, первого, т.е. рассмотрим одну из плоскостей симметрии данной пространственной конфигурации тел. Это сечение изображено на рис. 158. Нетрудно понять, что окружности с центрами в точках O_1 и O_4, получившиеся вследствие пересечения плоскости симметрии и первого и четвертого шаров, касаются образующей AC конуса. Поэтому $O_1O_4 \parallel AC$.

Длина высоты CE конуса равна сумме длин трех отрезков: $CE = CO_4 + O_4D + DE$, причем $O_4D = h = 2R\sqrt{2/3}$ — высота тетра-

эдра $O_1O_2O_3O_4$, $CO_4 = R/\sin\alpha$, где $\alpha = \widehat{ACE}$ — угол при вершине конуса, $DE = R$.

Синус угла α определяется отношением длин отрезков O_1D и O_1O_4:

$$\sin\alpha = \frac{O_1D}{O_1O_4},$$

причем длина отрезка O_1D равна 2/3 длины высоты основания тетраэдра $O_1O_2O_3O_4$ — $O_1D = 2/3 \cdot 2R \cdot \sqrt{3}/2 = 2R\sqrt{3}/3$. Таким образом,

$$\sin\alpha = \frac{2R\sqrt{3}/3}{2R} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad CO_4 = \frac{R}{\sqrt{3}/3},$$

$$CE = R + 2R\sqrt{2/3} + 3R/\sqrt{3} = R\left(1 + 2\sqrt{6}/3 + \sqrt{3}\right).$$

Задача 3. *Три одинаковых шара радиуса R касаются некоторой плоскости и друг друга внешним образом. Четвертый шар касается каждого из трех данных шаров и той же плоскости. Найти его радиус.*

Решение. Рассмотрим правильную треугольную пирамиду $O_1O_2O_3O_4$ с вершинами в центрах шаров, причем O_4 — центр четвертого шара (рис. 159). Длины сторон основания этой пирамиды равны $2R$, а длины боковых ребер — $(R + x)$, где x — радиус четвертого шара. Очевидно, что расстояние от плоскости основания правильной пирамиды $O_1O_2O_3O_4$ до данной плоскости равно R, поэтому высота пирамиды равна $(R - x)$.

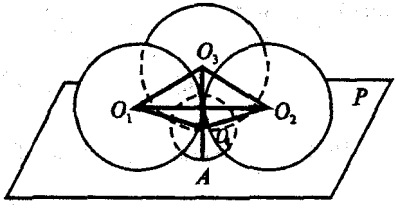


Рис. 159

Запишем выражение для связи высоты правильной пирамиды, высоты ее основания и длины бокового ребра:

$$(R + x)^2 = (R - x)^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot 2R\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2,$$

откуда находим: $x = R/3$.

Подобный прием можно использовать и при решении следующей задачи.

Задача 4. *Три шара радиуса r лежат на нижнем основании прямого кругового цилиндра, причем каждый из них касается двух других и боковой поверхности цилиндра. Четвертый шар лежит на этих трех шарах, касаясь поверхности цилиндра и его верхнего основания. Определить высоту цилиндра.*

Решение. Так как три шара имеют одинаковые радиусы и лежат на нижнем основании цилиндра, то их центры O_1, O_2 и O_3 (рис. 160) находятся в одной плоскости π, параллельной плоскости основания цилиндра. Поскольку четвертый шар касается боковой поверхности цилиндра и верхнего основания, то его радиус равен радиусу основания цилиндра R.

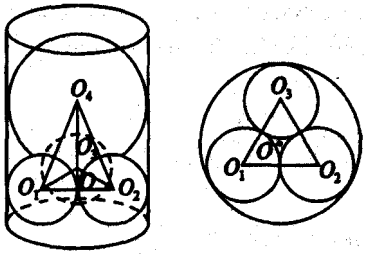


Рис. 160

Центр шара O_4 лежит на оси цилиндра и проектируется в точку O — центр сечения цилиндра плоскостью π. Это сечение представлено отдельно на том же рисунке. Легко усмотреть, что высота цилиндра $H = r + h + R$, где $h = OO_4$.

Рассмотрим пирамиду $O_1O_2O_3O_4$. Очевидно, что эта пирамида правильная, длины сторон основания равны $2r$, длины боковых ребер — $(r + R)$, следовательно, вершина пирамиды, точка O_4, проектируется в центр треугольника $O_1O_2O_3$. Теперь легко подсчитать, что

$$OO_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}r, \quad R = OO_1 + r = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}r.$$

Высоту h определяем из прямоугольного треугольника OO_1O_4:

$$h = \sqrt{O_1O_4^2 - OO_1^2} = \sqrt{(R + r)^2 - \frac{4}{3}r^2} = \frac{2}{3}r\sqrt{9 + 6\sqrt{3}}$$

Окончательно находим

$$H = \frac{2}{3}r\left(3 + \sqrt{3} + \sqrt{9 + 6\sqrt{3}}\right).$$

Во многих задачах рассматриваются один или несколько шаров, вписанные в двугранный угол, т.е. касающиеся плоскостей, образующих этот угол. В частности, речь может идти о шарах, касающихся двух, трех или большего числа граней какого-либо много-

гранника. При решении таких задач удобно использовать следующее соображения: ***центр шара, касающегося сторон двугранного угла, лежит в его биссекторной плоскости*** L, т.е. в плоскости, каждая точка которой равноудалена от граней P и Q этого угла (рис. 161);

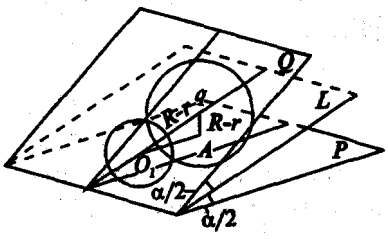


Рис. 161

если шар вписан в трехгранный угол, то центр такого шара лежит на прямой, являющейся пересечением биссекторных плоскостей составляющих его двугранных углов;

если в двугранный угол вписана пара шаров, касающихся друг друга, то между радиусами этих шаров и величиной α двугранного угла существует простое соотношение

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{R-r}{R+r} \quad \text{или} \quad \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1-r/R}{1+r/R}.$$

Как получается последнее соотношение, видно из рис. 161. Из него следует, в частности, что величина α двугранного угла определяет отношение радиусов вписанных в угол и касающихся друг друга шаров и наоборот, отношение радиусов таких шаров определят величину двугранного угла α.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу.

Задача 5. *Два одинаковых шара радиуса R касаются друг друга и граней двугранного угла, величина которого равна α. Найти радиус меньшего из двух шаров, касающихся граней двугранного угла и обоих данных шаров.*

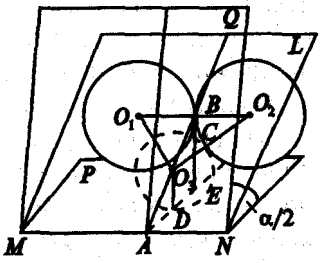


Рис. 162

Решение. Поскольку все шары касаются граней P и Q двугранного угла, то их центры O_1, O_2 и O_3 принадлежат биссекторной плоскости L, причем треугольник $O_1O_2O_3$ — равнобедренный (рис. 162). Длина O_1O_2 его основания равна $2R$, а длины боковых сторон — $(R+r)$, где r — радиус искомого шара. Шары O_1 и O_2 имеют одинаковый радиус R, поэтому их центры равноудалены от ребра MN двугранного угла и, следовательно, $O_1O_2 \parallel MN$, а высота O_3B равнобедренного треугольника $O_1O_2O_3$, где B — точка взаимного касания шаров O_1 и O_2, перпендикулярна этому ребру.

Спроектируем точки O_3 и B на одну из граней двугранного угла (например, P), получим точки D и E. В плоскости проектирования проведем $O_3C \parallel DE$. Рассмотрим прямоугольный треугольник O_3BC. Имеем:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{BC}{O_3B} = \frac{R-r}{O_3B}.$$

Высота O_3B треугольника $O_1O_2O_3$ находится по теореме Пифагора из треугольника O_1O_3B:

$$O_3B = \sqrt{O_1O_3^2 - O_1B^2} = \sqrt{(R+r)^2 - R^2} = \sqrt{r(2R+r)}.$$

Используя выражение для O_3B через r, получим уравнение для определения r:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{R-r}{\sqrt{r(2R+r)}}$$

или

$$r^2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 2Rr\left(1+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) + R^2 = 0.$$

Меньший корень этого уравнения имеет вид:

$$r = R\left[1+\sin^2\alpha/2 - \sin\alpha/2\cdot\sqrt{3+\sin^2\alpha/2}\right]/\cos^2\alpha/2.$$

Заметим, что больш(α/2)рен(α/2)внения оı(α/2)ляет р(α/2) другого, большего шара, также касающегося граней двугранного угла и данных шаров, но лежащего «за» этими шарами (рис. 162).

В качестве последнего примера рассмотрим следующую задачу.

Задача 6. *В двугранный угол величиной* 60° *вписан шар радиуса* R. *Найти радиус шара, вписанного в тот же угол и касающегося данного шара, если известно, что прямая, соединяющая центры обоих шаров, образует с ребром двугранного угла угол* 45°.

Решение. Как и в предыдущих случаях, центры шаров лежат в биссекторной плоскости P (рис. 163). Нетрудно заметить, что задача имеет два решения. На прямой, проходящей через центр данного шара и образующей угол 45° с ребром двугранного угла, можно выбрать две точки O_1 и O_2 для центров искомых шаров. Радиус одного из этих шаров будет меньше R, радиус другого шара — больше, чем R. Проведем O_1B и OC параллельно ребру дву-

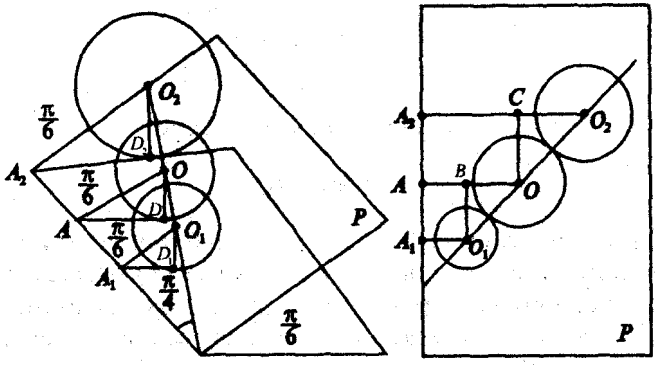


Рис. 163

гранного угла. Тогда прямоугольные треугольники OO_1B и OO_2C будут иметь острые углы по 45°. Обозначим через x радиус искомых шаров. Возможны два случая:

1) $x < R$. В этом случае имеем:

$AO = 2R$ (из ΔAOD); $A_1O_1 = 2x$ (из $\Delta A_1O_1D_1$);

$OO_1 = R + x$, $OB = 2(R - x)$.

Из ΔOO_1B находим $OB = OO_1 \cdot \sqrt{2}/2$, т.е.

$$2(R - x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(R + x).$$

Отсюда получаем выражение для x:

$$x = R\frac{4 - \sqrt{2}}{4 + \sqrt{2}}. \qquad (1)$$

2) $x > R$. В этом случае имеем:

$AO = 2R$ (из ΔAOD); $A_2O_2 = 2x$ (из $\Delta A_2O_2D_2$);

$O_2O = R + x$, $O_2C = 2(x - R)$.

Из ΔOO_2C находим $O_2C = OO_2 \cdot \sqrt{2}/2$, т.е.

$$2(x - R) = \frac{\sqrt{2}}{2}(R + x).$$

Отсюда получаем выражение для x:

$$x = R\frac{4+\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}}. \qquad (2)$$

Формулы (1) и (2) дают решения задачи.

ЗАДАЧИ

1. Три шара радиуса R лежат на нижнем основании правильной треугольной призмы, причем каждый из них касается двух других шаров и двух боковых граней призмы. На этих шарах лежит четвертый шар, который касается всех боковых граней и верхнего основания призмы. Определить высоту призмы.

Ответ: $R\left(6+\sqrt{3}+\sqrt{27+12\sqrt{3}}\right)/3.$

2. Три шара касаются плоскости треугольника ABC в его вершинах и попарно между собой. Найти радиусы шаров, если известны длина с стороны AB и прилежащие к ней углы $\hat{A}$ и $\hat{B}$

Ответ: $r_1 = c\cdot\sin\hat{B}/2\sin\hat{A}$, $r_2 = c\cdot\sin\hat{A}/2\sin\hat{B}$,

$$r_3 = c\cdot\sin\hat{A}\sin\hat{B}/2\sin^2(\hat{A}+\hat{B}).$$

3. В шар вписан прямой круговой цилиндр. Во сколько раз объем шара больше объема цилиндра, если известно, что отношение радиуса шара к радиусу основания цилиндра вдвое меньше, чем отношение поверхности шара к боковой поверхности цилиндра?

Ответ: 16 : 9.

4. Две одинаковые сферы касаются друг друга и граней двугранного угла. Третья сфера, меньшего радиуса, также касается граней этого двугранного угла и обеих данных сфер. Дано отношение m радиуса меньшей сферы к радиусу одной из одинаковых сфер. Найти величину α двугранного угла. В каких пределах может меняться параметр m?

Ответ: $\alpha = 2\arcsin\left[(1-m)/\sqrt{m^2+2m}\right]$; $0{,}25 < m < 1$.

5. В прямом круговом конусе угол при вершине осевого сечения равен 60°. В этом конусе расположены три одинаковых шара радиуса R, касающиеся изнутри боковой поверхности конуса, плоскости основания конуса и попарно друг друга. Найти площадь боковой поверхности другого конуса с той же вершиной,

высотой и плоскостью основания, которого данные шары касаются внешним образом.

Ответ: $26\pi R^2/27r$.

6. На плоскости лежат, не пересекаясь, два шара радиусов r и R. Расстояние между центрами шаров равно ρ. Найти минимально возможный радиус шара, который лежал бы на этой плоскости и касался заданных шаров.

Ответ: $(\rho + R - r)(\rho + r - R)/4\left(\sqrt{R} + \sqrt{r}\right)^2$.

7. В правильную треугольную пирамиду помещены три шара так, что первый шар касается всех боковых граней пирамиды и второго шара, второй шар касается боковых граней и третьего шара, третий шар касается боковых граней, основания пирамиды и второго шара. Какую долю объема пирамиды занимают три шара, если ее боковые грани наклонены к основанию под углом α?

Ответ: $4\pi\sqrt{3}\,(\mathrm{tg}^3\alpha/2 + \mathrm{tg}^9\alpha + \mathrm{tg}^{15}\alpha/2)\,/\,9\mathrm{tg}\,\alpha$.

8. В прямой круговой конус, у которого образующая составляет с осью угол α, помещены три шара так, что первый шар касается боковой поверхности конуса и второго шара, второй шар касается боковой поверхности, первого и третьего шаров, а третий шар касается боковой поверхности, основания конуса и второго шара. Какую долю объема конуса занимают все три шара?

Ответ: $4\,(\mathrm{tg}^3\alpha/2 + \mathrm{tg}^9\alpha/2 + \mathrm{tg}^{15}\alpha/2)\,/\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

9. Три одинаковых прямых круговых конуса, радиусы оснований которых равны r, а высоты равны $4r/3$, расположены по одну сторону от плоскости P, а их основания лежат в этой плоскости. Окружности оснований каждых двух из этих конусов касаются. Найти радиус шара, лежащего между конусами и касающегося как плоскости P, так и всех трех конусов.

Ответ: $2r\,(2\sqrt{3} - 3)/3$.

10. В правильной четырехугольной пирамиде расположены два шара O_1, и O_2. Шар O_1 вписан в пирамиду и имеет радиус 2, шар O_2 касается внешним образом шара O_1 и боковых граней пирамиды. Радиус шара O_2 равен 1. Найти площадь боковой поверхности пирамиды и величину двугранного угла при боковом ребре пирамиды.

Ответ: 96; $2\arcsin\,(\sqrt{5}/3)$.

§ 7. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Определить синус угла между двумя высотами, опущенными из двух вершин правильного тетраэдра на противоположные грани.

Ответ: $2\sqrt{2/3}$ см^3.

2. Основанием пирамиды служит равнобедренный прямоугольный треугольник, катет которого равен 8 см. Длина каждого бокового ребра составляет 9 см. Найти объем пирамиды.

Ответ: 74.

3. Основание пирамиды — правильный треугольник с длиной стороны, равной 6. Одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания; его длина равна 4. Найти радиус шара, описанного вокруг пирамиды.

Ответ: 4.

4. Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости основания под углами, величины которых равны α и β. Найти величину угла между этими диагоналями.

Ответ: $\arccos(\sin\alpha \cdot \sin\beta)$.

5. Площадь боковой грани правильной шестиугольной пирамиды равна S. Вычислить площадь сечения, проходящего через середину высоты пирамиды параллельно боковой грани.

Ответ: $25/16 \cdot S$.

6. В основании пирамиды лежит равносторонний треугольник с длиной стороны, равной a. Высота пирамиды проходит через середину одного из ребер основания и имеет длину $3a/2$. Найти радиус шара, описанного вокруг пирамиды.

Ответ: $a\sqrt{7}/3$.

7. Через сторону оснований правильной треугольной пирамиды и центр вписанного в нее шара проведена плоскость. В каком

отношении эта плоскость делит объем пирамиды, если ее боковое ребро в 3,5 раза длиннее стороны основания.

Ответ: 4 : 1.

8. Плоскость пересекает боковые ребра SA, SB и SC треугольной пирамиды $SABC$ в точках K, L и M, соответственно. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды, если известно, что $SK : KA = SL : LB = 2$, а медиана SN треугольника SBC делится этой плоскостью пополам.

Ответ: 7 : 29.

9. В треугольной пирамиде $SABC$ ребро SA перпендикулярно плоскости грани ABC, двугранный угол с ребром SC равен 45°, $SA = BC = a$ и угол ABC прямой. Найти длину ребра AB.

Ответ: $a\sqrt{\sqrt{2}-1}$.

10. Основанием треугольной пирамиды служит равносторонний треугольник. Три другие грани образуют с основанием двугранные углы, величины которых равны α, β и γ, каждый меньше $\pi/2$. В пирамиду вписан шар. Определить отношение радиуса шара к высоте пирамиды.

Ответ: $(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma) / (\operatorname{ctg}\alpha/2 + \operatorname{ctg}\beta/2 + \operatorname{ctg}\gamma/2)$.

11. Определить объем параллелепипеда, у которого длины всех ребер равны 1, а все плоские углы при одной из вершин имеют величину φ ($\varphi < 90°$).

Ответ: $\sin\varphi \cdot \sqrt{\sin^2\varphi - \cos^2\varphi \cdot \operatorname{tg}\varphi/2}$.

12. Ребра треугольной пирамиды, выходящие из вершины O, попарно перпендикулярны, и их длины равны a, b и c. Найти объем куба, вписанного в эту пирамиду так, что одна из его вершин совпадает с вершиной O.

Ответ: $a^3b^3c^3/(ab + ac + bc)^3$.

13. Усеченный конус и правильная шестиугольная призма расположены так, что верхнее основание усеченного конуса вписано в верхнее основание призмы, а нижнее основание усеченного конуса описано около нижнего основания призмы. Известно, что длина высоты усеченного конуса равна сумме длин радиусов его оснований. Найти отношение боковых поверхностей этих фигур.

Ответ: $\pi\sqrt{14}/12$.

14. Длина стороны основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна a. Точка D — середина ребра AB, точка E принадлежит ребру A_1C_1. Прямая DE образует углы α и β с плоскостями ABC и AA_1C_1C, соответственно. Найти высоту призмы и радиус шара с центром на отрезке DE, касающегося плоскостей ABC и AA_1C_1C.

Ответ: $a\sqrt{3}/4 \cdot \sin\alpha/\sin\beta$; $a\sqrt{3}/4 \cdot \sin\alpha/(\sin\alpha + \sin\beta)$.

15. Все ребра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину a. Рассматриваются отрезки с концами на диагоналях BC_1 и CA_1 боковых граней, параллельные плоскости ABB_1A_1. Один из этих отрезков проведен через точку M диагонали BC_1 такую, что $BM : BC_1 = 1 : 3$. Найти его длину. Найти также наименьшую длину всех рассматриваемых отрезков.

Ответ: $\sqrt{5}\,a/3$; $a/\sqrt{5}$.

16. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, длины ребер AB, BC и BB_1 равны соответственно $2a$, a и a. Точка E — середина ребра BC. Вершины M и N правильного тетраэдра $MNPQ$, лежат на прямой C_1E, вершины P и Q — на прямой, проходящей через точку B_1 и пересекающей прямую AD в точке F. Найти длину отрезка DF и расстояние между серединами отрезков MN и PQ.

Ответ: a; $4a/3\sqrt{5}$.

17. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a. Точка E —середина ребра AD. Вершины M и N правильного тетраэдра $MNPQ$ лежат на прямой ED_1, а вершины P и Q, — на прямой, проходящей через точку A_1 и пересекающей прямую BC в точке R. Найти отношение длин $BR : BC$ и расстояние между серединами отрезков MN и PQ.

Ответ: 2; $2a/\sqrt{30}$.

18. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, имеет длину a. На ребрах AB и CC_1 взяты соответственно точки M и N так, что прямая MN образует угол 30° с плоскостью $ABCD$ и угол $\arcsin 1/3$ с плоскостью BB_1C_1C. Найти длину отрезка MN и радиус шара с центром на отрезке MN, касающегося плоскостей $ABCD$ и BB_1C_1C.

Ответ: $6a/\sqrt{23}$; $6a/5\sqrt{23}$.

19. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, является равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами

$AC = BC = a$. Вершины M и N правильного тетраэдра $MNPQ$ лежат на прямой CA_1, а вершины P и Q — на прямой AB_1. Найти объем призмы и расстояние между серединами отрезков MN и PQ.

Ответ: $a^3/2$; $a/\sqrt{6}$.

20. Дан правильный тетраэдр $SABC$, длина ребра которого равна a. Через точки C, E, M и S, где E — середина ребра AB, а M — середина ребра AC, проведена сфера. Найти радиус этой сферы.

Ответ: $a\sqrt{22}/8$.

21. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ с нижним основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA', BB', CC' и DD'. Длина ребра куба равна $(4 - 2\sqrt{2})/(\sqrt{23} - \sqrt{2} - 3)$. Первая сфера касается нижнего основания $ABCD$, боковой грани $BB'C'C$ и плоскости $AA'C'C$. Вторая сфера с центром в точке A' имеет радиус вдвое больший, чем радиус первой сферы, и касается первой сферы внешним образом. Найти радиус первой сферы.

Ответ: 1.

22. В треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина) грань SAC перпендикулярна грани ABC. Кроме того, $SA = SC = 1$, а угол при вершине B треугольника ABC — прямой. Шар касается плоскости основания пирамиды в точке B, а грани SAC — в точке S. Найти радиус шара.

Ответ: $\sqrt{2}/2$.

23. Дана пирамида $SABC$ (S — вершина), в которой ребро AC перпендикулярно грани SAB. Шар касается грани ASC в точке S, а грани ABC — в точке B. Найти радиус шара, если $AC = 1$, $\widehat{ACB} = \widehat{BCS} = 60°$.

Ответ: $\sqrt{6}/2$.

24. Длина стороны основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S равна 1, а длина ее высоты — $\sqrt{2}$. На ребрах SA и SC взяты точки K и M, соответственно, причем $AK : KS = 1/3$; $CM = SM$. Найти отношение, в котором делится ребро SB плоскостью, проведенной через точки D, K и M.

Ответ: 4 : 3.

25. В прямой круговой цилиндр с радиусом основания, равным 3/2, и высотой $6(\sqrt{2} - 1)$ вписаны четыре одинаковых шара так,

что они касаются верхнего основания цилиндра и его боковой поверхности и каждый из шаров касается двух из трех других шаров. Найти площадь боковой поверхности прямого кругового конуса, основание которого совпадает с нижним основанием цилиндра и который касается всех четырех шаров.

Ответ: $15\pi/4$.

26. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$, длина ребра которого равна 1. На ребрах AA', BB', и DD' взяты соответственно точки K, P и M так, что $AK:A'K=1:3$, $BP:B'P=3:1$, $DM:D'M=3:1$. Найти объем пирамиды, у которой основанием служит сечение куба плоскостью, проходящей через точки K, P и M, а вершина находится в точке A'.

Ответ: $7/32$.

27. В основании треугольной пирамиды $ABCD$ лежит правильный треугольник ABC. Грань BCD образует с плоскостью основания угол 60°. На прямой, проходящей через точку D перпендикулярно основанию, лежит центр сферы единичного радиуса, которая касается ребер AB, AC и грани BCD. Высота пирамиды DO в два раза меньше длины стороны основания. Найти объем пирамиды.

Ответ: $9\sqrt{3}/8$.

28. На основании правильной треугольной пирамиды, высота которой равна H, а радиус вписанного в основание круга — r, лежит шар, касающийся основания в его центре. Найти радиус шара, если плоскость, проведенная через вершину пирамиды и середины двух сторон основания, касается этого шара.

Ответ: $Hr/(r+\sqrt{r^2+4H^2})$.

29. В прямой круговой конус вписан шар, поверхность которого равна площади основания конуса. В каком отношении боковая поверхность конуса делится линией касания шара и конуса?

Ответ: $4:25$.

30. Величина угла в осевом сечении прямого кругового конуса равна α. Через его вершину под углом β к оси конуса ($\beta < \alpha/2$) проведена плоскость. Найти величину угла между двумя образующими конуса, по которым проведенная плоскость пересекает его поверхность.

Ответ: $2\operatorname{arctg}\left[\sqrt{\sin(\alpha/2+\beta)\sin(\alpha/2-\beta)}/\cos\alpha/2\right]$.

31. Прямой круговой цилиндр описан около шара радиуса R. Точка C расположена внутри цилиндра на его оси и удалена на $3/4 \cdot R$ от нижнего основания. Через эту точку проведена плоскость P, имеющая с окружностью нижнего основания только одну общую точку. В шар вписан прямой круговой конус, основание которого лежит в плоскости P, а вершина расположена выше этой плоскости. Найти объем этого конуса.

Ответ: $48\pi R^3/125$.

32. В прямом круговом конусе угол при вершине осевого сечения равен 60°. В этом конусе расположены три одинаковых шара радиуса r, касающиеся изнутри боковой поверхности конуса, плоскости основания конуса и попарно друг друга. Найти площадь боковой поверхности другого конуса с той же вершиной, длиной высоты и плоскостью основания, которого данные шары касаются внешним образом.

Ответ: $26\pi/27 \cdot r^2$.

33. Треугольная пирамида $ABCD$, все ребра которой имеют длину a, вложена в прямой круговой конус так, что вершина A лежит на окружности основания конуса, ребро AD лежит в плоскости основания конуса, ребро BC параллельно основанию конуса, а вершины B и C лежат на боковой поверхности конуса. Величина угла между высотой конуса и его образующей равна α ($\alpha < \pi/6$). Определить высоту конуса.

Ответ: $a \cdot a[\operatorname{tg} 2\alpha/(1-\sqrt{2tg\alpha})]$.

34. В правильную треугольную пирамиду $SABC$, все ребра которой имеют длину a, вписана сфера. Высота SD пирамиды опущена на основание ABC. На ребре AC взята точка M так, что $MC = 2 \cdot AM$, а на высоте SD — точка N так, что $ND = 2 \cdot NS$. Прямая MN пересекает сферу в двух точках P и Q. Найти длину отрезка PQ.

Ответ: $2a/3\sqrt{11}$.

35. В правильную четырехугольную пирамиду с вершиной S и основанием $ABCD$ вписана сфера. Длина стороны основания пирамиды равна a, а длина бокового ребра — $a\sqrt{5}/2$. На апофеме SE грани DSC взята точка M так, что $SM = ME$. Найти расстояние

между точками, в которых прямая AM пересекает сферу, вписанную в пирамиду.

Ответ: $a/2$.

36. Три прямых круговых конуса имеют общую вершину, и каждый из них касается внешним образом двух других. Вычислить величину углов между линиями касания боковых поверхностей этих конусов, если у первого конуса величина угла между осью и образующей равна α, у второго — β, у третьего — γ.

Ответ:

$$\arccos\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cdot\frac{\cos Q_1-\cos Q_2\cos Q_3}{\sin Q_2\sin Q_3}\right),$$

$$\arccos\left(\cos^2\beta+\sin^2\beta\cdot\frac{\cos Q_2-\cos Q_1\cos Q_3}{\sin Q_1\sin Q_3}\right),$$

$$\arccos\left(\cos^2\gamma+\sin^2\gamma\cdot\frac{\cos Q_3-\cos Q_1\cos Q_2}{\sin Q_1\sin Q_2}\right),$$

где $Q_1=\beta+\gamma$; $Q_2=\alpha+\gamma$; $Q_3=\alpha+\beta$.

37. В прямом круговом конусе с вершиной S величина угла между образующими SA и SB равна α, а между их проекциями на плоскость основания — β. Вычислить величину угла между биссектрисами углов OSA и OSB, где точка O является центром круга, служащего основанием конуса.

Ответ: $\arccos\,[\cos^2(\beta/2)+\sin(\beta/2)\sqrt{1/2(\cos\alpha-\cos\alpha/2)}]$.

38. Шар радиуса r, касается всех ребер треугольной пирамиды. Центр шара лежит внутри пирамиды на ее высоте на расстоянии $r\cdot\sqrt{3}$ от вершины. Доказать, что пирамида правильная. Найти длину ее бокового ребра.

Ответ: $4r/3$.

39. Шар касается всех боковых граней треугольной пирамиды в центрах описанных около них окружностей. Каждый из трех плоских углов при вершине пирамиды имеет величину α. Сумма длин боковых ребер пирамиды равна $3b$. Доказать, что пирамида правильная. Найти радиус шара.

Ответ: $b\,\mathrm{tg}\,(\alpha/2)\sqrt{\sin(\alpha/2)}\,/\,2\sqrt{\sin(3\alpha/2)}$.

40. Боковая поверхность треугольной пирамиды равна S, а периметр основания $3a$. Шар касается всех трех сторон основания в их серединах, а середины боковых ребер лежат на поверхности шара. Доказать, что пирамида правильная. Найти радиус шара.

Ответ: $\sqrt{16S^2 + 45a^4}\ /24a$.

41. Длина ребра куба равна a. Найти объем прямого кругового цилиндра, вписанного в куб так, что осью его является диагональ куба, а окружности оснований касаются тех диагоналей граней куба, которые не имеют общих точек с диагональю куба.

Ответ: $\pi\sqrt{3}\,a^3/18$.

42. Высота правильной четырехугольной пирамида равна $\sqrt{2}$, а длина стороны основания 1. В каком отношении делится объем пирамиды поверхностью шара, центр которого расположен в вершине пирамиды, а радиус основания равен 1?

Ответ: $(8\varphi - 2\pi) : (\sqrt{2} - 8\varphi + 2\pi)$, $\varphi = \operatorname{arctg}\ (\sqrt{5}/2)$.

43. В центре шара помещена вершина правильной треугольной пирамиды, длина стороны основания которой равна радиусу шара, а объем относится к объему шара как $3 : 16\pi$. В каком отношении делится объем пирамиды поверхностью шара?

Ответ: $(3\varphi - \pi) : (3/4 - 3\varphi + \pi)$, $\varphi = 2\ \arcsin\ \sqrt{10/37}$.

44. В треугольной пирамиде $SABC$ середины всех ребер лежат на поверхности шара радиуса 2. Известно, что $AB = 3$, $AC = 4$. Ребро SA перпендикулярно к плоскости основания ABC. Доказать, что отрезки, соединяющие середины противоположных ребер пирамиды, являются диаметрами указанного шара, и найти объем пирамиды.

Ответ: $2\sqrt{39}$.

45. Шар радиуса R касается всех боковых граней треугольной пирамиды в серединах сторон ее основания. Отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром шара, делится пополам точкой пересечения с основанием пирамиды. Найти объем пирамиды.

Ответ: $\sqrt{6}\,R^3/4$.

46. В пирамиде $SABC$ произведения длин ребер каждой из четырех граней равны одному и тому же числу. Длина высоты пирами-

ды, опущенной из точки S на грань ABC, равна $2\sqrt{102/55}$, а величина угла CAB равна arccos ($\sqrt{34}$ /12). Найти объем пирамиды $SABC$, если

$$SA^2 + SB^2 - 5 \cdot SC^2 = 60.$$

Ответ: $34\sqrt{6}/3$.

47. Точка O — общая вершина двух равных конусов, расположенных по одну сторону от плоскости α, так что только одна образующая каждого конуса (OA для одного конуса и OB для другого), принадлежит плоскости α. Известно, что величина угла между высотами конусов равна β, а величина угла между высотой и образующей конуса равна φ, причем $2\varphi < \beta$. Найти величину угла между образующей OA и плоскостью основания другого конуса, которой принадлежит точка B.

Ответ: $\pi/2 - \arccos[\cos\varphi - 2\sin^2(\beta/2)/\cos\varphi]$.

48. На сфере радиуса 11 расположены точки A, A_1, B, B_1, C и C_1. Прямые AA_1, BB_1 и CC_1 взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке M, отстоящей от центра сферы на расстояние $\sqrt{59}$. Найти длину отрезка AA_1 если известно, что длина отрезка BB_1 равна 18, а точка M делит отрезок CC_1 в отношении $(8 + \sqrt{2}) : (8 - \sqrt{2})$.

Ответ: 20.

49. В правильную шестиугольную пирамиду вписан прямой конус, и около нее описан прямой конус. Дана высота пирамиды H и радиус основания описанного конуса R. Найти разность объемов описанного и вписанного конусов.

Ответ: $\pi HR^2/12$.

50. Прямоугольные проекции плоского четырехугольника на две взаимно перпендикулярные плоскости являются квадратами с длиной стороны, равной 1. Найти периметр четырехугольника, зная, что одна из его сторон имеет длину $\sqrt{3/2}$.

Ответ: $4\sqrt{3/2}$.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное пособие

Лурье Михаил Владимирович

ГЕОМЕТРИЯ. Техника решения задач

3-е издание, стереотипное. Серия «Библиотека школьника»

Оригинал-макет подготовлен Издательским отделом УНЦ ДО

ЛР № 065194 от 02.06.1997 (ФЕНИКС)

ИД № 00545 от 06.12.1999 (УНЦ ДО)

Издательство «Феникс»
334007, г. Ростов-на-Дону, пер. Соборный, 17
Тел./факс (8632) 62-57-97, 62-58-44
e-mail: gleb@ic.ru

Издательский отдел
Учебно-научного центра довузовского образования
117246, Москва, ул. Обручева, 55А
119992, Москва, Ленинские горы, ГЗ МГУ, Ж-105а
Тел./факс (095) 718-6966, 939-3934
e-mail: izdat@abiturcenter.ru
http://www.abiturcenter.ru

Подписано в печать 25.07.2002г. Формат 60x90/16
Бумага типографская № 2. Усл.печ.л. 15

Тираж 10000 экз. Заказ № 2836.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ФГУИПП «Курск»
305007, г. Курск, ул. Энгельса, 109.

ЕНИКС

ISBN 5-222-02686-8

9 785222 026861